



Computational Intelligence in Electrical Engineering
Vol. 12, No. 2, 2021
Research Paper

Designing an LMI-Based Robust Leader-Following Consensus Control for Time-Delayed Multi-Agent Systems with Unknown Coefficient Matrix

Vahid Bagheri¹, Amir Farhad Ehyaei^{2*}

¹ Faculty of Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

² Faculty of Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

Abstract:

In this paper, a robust controller is designed for a multi-agent system comprising a leader agent and followers. Follower agents are supposed to have linear dynamics with time-delay considering uncertainties in state- space coefficient matrices. The dynamics of the leader agent are similar to the followers; however, without any uncertainty. The purpose of the consensus controller is to make the follower agent state variables to track the leader in presence of time-delay and uncertainties. The necessary condition for consensus is the existence of at least a spanning tree in the graph corresponding to a multi-agent system. If the condition is met, a feedback linearization controller is firstly designed for the leader to reach the desired position; then a robust controller is proposed for each follower to eliminate the effect of model uncertainties by defining the consensus error dynamic between the followers and leader and assuming a specific amount of delay for all agents. High precision, fast convergence, and good robustness against uncertainties are ensured thanks to the newly proposed control scheme. Finally, asymptotic convergence of the consensus error to zero is guaranteed and LMI conditions for the stability of the closed-loop system is presented. Simulation results show the stability and effectiveness of the proposed controller.

Keywords: Multi-Agent System, Consensus Controller, Time-Delay, Model Uncertainty, Robust Controller, Linear Matrix Inequality.



2252-083X/ © 2021 The Authors. Published by University of Isfahan

This is an open access article under the CC BY-NC-ND/4.0/ License (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



<http://dx.doi.org/10.22108/isee.2020.119771.1293>

طراحی کنترل‌کننده اجماع پیرو - پیشرو مقاوم بر مبنای LMI برای

سیستم‌های چندعاملی تأخیردار با ماتریس‌های ضرایب نامعلوم

وحید باقری^۱، امیر فرهاد احيائي^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه بین‌المللی امام خمینی - قزوین - ایران

V.Bagheri@edu.ikiu.ac.ir

۲- استادیار، دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه بین‌المللی امام خمینی - قزوین - ایران

f.ehyaei@eng.ikiu.ac.ir

چکیده: در این مقاله، یک کنترل‌کننده مقاوم برای سیستمی چندعاملی متشکل از یک عامل پیشرو و N عامل پیرو طراحی شده است. دینامیک عامل‌های پیرو، دینامیک خطی همراه با تأخیر و ماتریس ضرایب متغیر حالت آن همراه با نامعینی در نظر گرفته می‌شود. دینامیک عامل پیشرو همانند عامل پیرو است؛ اما بدون نامعینی فرض می‌شود. هدف اجماع در طراحی این کنترل‌کننده این است که متغیرهای حالت عامل‌های پیرو در حضور تأخیر و نامعینی از متغیرهای حالت عامل پیشرو تبعیت کنند. شرط لازم برای اجماع، وجود حداقل یک درخت پوشا در گراف متناظر با سیستم چندعاملی است. در صورت برقراری این شرط، ابتدا یک کنترل‌کننده خطی ساز فیدبک برای عامل پیشرو طراحی می‌شود؛ به طوری که در مکان مطلوب قرار بگیرد. سپس با تعریف دینامیک خطای اجماع بین عامل‌های پیرو و پیشرو و با فرض مشخص بودن مقدار دقیق تأخیر در دینامیک عامل‌ها، برای حذف اثر نامعینی‌ها یک کنترل‌کننده مقاوم H_∞ برای عامل‌های پیرو پیشنهاد می‌شود. دقت بالا، همگرایی سریع و مقاومت خوب در برابر نامعینی‌های مدل به لطف کنترل‌کننده جدید پیشنهادی حاصل می‌شود. در نهایت، همگرایی مجانبی دینامیک خطای اجماع به صفر اثبات می‌شود و شرایط LMI برای تضمین پایداری سیستم حلقه بسته ارائه می‌شود. نتایج شبیه‌سازی، پایداری و کارایی کنترل‌کننده ارائه‌شده را نشان می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: سیستم چندعاملی، کنترل‌کننده اجماع، تأخیر زمانی، نامعینی مدل، کنترل‌کننده مقاوم، نامعادله ماتریسی خطی

۱- مقدمه

مشخص با یکدیگر تبادل اطلاعات می‌کنند [1]. برای کنترل سیستم‌های چندعاملی، روش‌های زیادی وجود دارد و این روش‌ها متناسب با هدف مدنظر انتخاب می‌شوند [2]. یکی از این روش‌ها، کنترل اجماع است. هدف از این روش، تبعیت عامل‌های پیرو از عامل پیشرو است [3]. کنترل‌کننده‌های اجماع به دو دسته تقسیم می‌شوند؛ کنترل‌کننده اجماع میانگین و کنترل‌کننده اجماع پیرو - پیشرو. در کنترل‌کننده اجماع میانگین، تمامی عامل‌های پیرو به میانگین شرایط اولیه خود همگرا می‌شوند [4]؛ اما در کنترل‌کننده اجماع پیرو - پیشرو، تمامی عامل‌های پیرو سعی در تبعیت از رفتار عامل پیشرو دارند [5].

سیستم‌های چندعاملی، با توجه به کاربردهای گسترده و قابلیت‌های بیشتر نسبت به سایر سیستم‌ها در سال‌های اخیر بسیار شایان توجه محققان قرار گرفته‌اند. این سیستم‌ها از تعدادی عامل تشکیل شده‌اند که برای رسیدن به هدفی

^۱ تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۷/۳۰

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۱۸

نام نویسنده مسئول: امیر فرهاد احيائي

نشانی نویسنده مسئول: ایران - قزوین - دانشگاه بین‌المللی امام خمینی - دانشکده فنی و مهندسی.

مقالاتی که به‌تازگی روی سیستم‌های چندعاملی مطالعه کرده‌اند، نامعینی را در ورودی و همچنین تأخیر را در ارتباط بین عامل‌ها و تبادل اطلاعات در نظر گرفته‌اند. در این مقاله نامعینی در ماتریس ضرایب موجود در دینامیک عامل‌ها و تأخیر در دینامیک عامل‌ها است. همچنین با توجه به اینکه سیستم‌های چندعاملی، سیستم‌هایی با ابعاد وسیع‌اند، در این سیستم‌ها نیز می‌توان از کاهش مرتبه استفاده کرد [22] که زمینه‌ای مناسب برای توسعه روش ارائه شده است.

به‌صورت مشخص سیستم مدنظر در این مقاله نوآوری‌های زیر را دارد: ۱- محدودیتی در مرتبه سیستم ندارد و برای سیستم‌های مرتبه بالاتر از دو نیز می‌توان از این کنترل‌کننده استفاده کرد. ۲- تأخیر در دینامیک عامل‌ها در نظر گرفته شده است و باید مقدار این تأخیر معلوم باشد. ۳- ماتریس ضرایب متغیرهای حالت، نامعینی دارند. ۴- ماتریس ضرایب تأخیریافته متغیرهای حالت، نامعینی دارند. سیستم مدنظر چهار نوآوری بیان شده به‌صورت هم‌زمان دارد. تاکنون هیچ مقاله‌ای این ۴ مورد را به‌صورت هم‌زمان در نظر نگرفته است.

در این مقاله، ابتدا با استفاده از کنترل‌کننده خطی‌ساز فیدبک، کنترل‌کننده برای عامل پیشرو طراحی می‌شود تا این عامل به سمت مسیر دلخواه ما به‌صورت پایدار میل کند. سپس با استفاده از ضرب کرونگر دینامیک عامل‌های پیرو و پیشرو را به‌صورت کلی بیان می‌کند و از فرمول‌های به‌دست‌آمده برای بیان دینامیک خطای اجماع استفاده می‌کند. با توجه به اینکه در دینامیک خطای اجماع، نامعینی وجود دارد، از کنترل‌کننده مقاوم برای حذف این نامعینی‌ها استفاده شده است. درنهایت با استفاده از نامعادلات ماتریسی خطی، فرم کلی مسئله H^∞ برای این مسئله بیان می‌شود. در قسمت آخر نتایج به‌دست‌آمده روی یک سیستم، شبیه‌سازی و درستی این کنترل‌کننده بررسی می‌شود.

۲- بیان مسئله

یک سیستم چندعاملی با یک عامل پیشرو و N عامل پیرو را در نظر بگیرید. هر عامل، n متغیر حالت

با توجه به عملکرد بهتر کنترل‌کننده‌های اجماع پیرو - پیشرو، این روش در مقاله حاضر استفاده شده است. شرط لازم و کافی برای انجام اجماع سیستم چندعاملی این است که حداقل یک درخت پوشا در گراف مربوط به سیستم چندعاملی مدنظر موجود باشد. برای طراحی این کنترل‌کننده باید خطای اجماع را نوشت و سپس سعی شود این خطا به‌صورت پایدار به صفر میل کند [6]. برای صفرکردن خطای اجماع، روش‌های زیادی وجود دارد؛ این خطا را می‌توان نوشت و با روش مستقیم، ورودی کنترلی را به نحوی طراحی کرد که خطای اجماع به صفر میل کند. در [7] مسئله ردیابی اجماع مقاوم برای یک سیستم چندعاملی بررسی شده است. در این مسئله، عامل‌ها دارای دینامیک مدل‌نشده و اغتشاش‌اند. عامل‌های مرتبه دوم در [8]، عامل‌های از نوع انتگرال‌گیر در [9] و عامل‌های مرتبه بالا در [10] بررسی شده‌اند. در [11] آنالیز اجماع مقاوم H^∞ برای عامل‌هایی بررسی شده است که نامعینی پارامتری و اغتشاش دارند. در [12] اجماع مقاوم توزیع‌شده برای عامل‌هایی با دینامیک دو انتگرال‌گیر نامعین بررسی شده است. در [13] و [14] اجماع مقاوم H^∞ برای نامعینی پارامتری و اغتشاش به همراه تأخیر در عامل‌ها بررسی شده است. در [15]، اجماع مقاوم برای عامل‌های تأخیردار به همراه نویز و در [16] اجماع مقاوم برای سیستم‌های دینامیکی چندعاملی با نامعینی بررسی شده است. در [17] اجماع مقاوم برای سیستم‌های دینامیکی چندعاملی دارای تأخیر و اغتشاش بررسی شده است. در [18] یک الگوریتم تکراری برای اجماع سیستم‌های چندعاملی خاصی با تأخیر در پارامترهای مدل ارائه شده است. این کنترل‌کننده برای سیستم‌های مرتبه دوم صادق است. در [19] نیز یک کنترل‌کننده اجماع برای سیستم‌های چندعاملی مرتبه دوم همراه با تأخیر و نویز اندازه‌گیری، ارائه شده است. در [20] مسئله دنبال‌روی برای سیستم‌های چندعاملی مرتبه دوم با دینامیک نامعین با کنترل‌کننده تطبیقی انجام شده است. در [21] مسئله اجماع برای سیستم‌های چندعاملی مرتبه اول و دوم با دینامیک نامعین و اغتشاش ورودی با کنترل‌کننده تطبیقی فازی بررسی شده است؛ حال آنکه کنترل‌کننده ارائه شده در این مقاله محدودیت مرتبه ندارد. معمولاً

با استفاده از ضرب کرونگر و با فرض $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix}_{N \times 1}$ و

$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix}_{N \times 1}$ دینامیک کلی عامل پیشرو به صورت زیر است:

$$\dot{X}_0(t) = (I_N \otimes A)X_0(t) + (I_N \otimes A_d)X_0(t-d) + (I_N \otimes B)U_0(t) \quad (6)$$

و هدف، اجماع عامل‌ها است. در این مقاله تنها یک عامل پیشرو وجود دارد؛ اما باید ابعاد ماتریس حالت X_0 و ماتریس حالت X برابر باشند. بنابراین، متناظر با هر عامل در ماتریس X_0 ، x_0 قرار می‌دهیم تا ابعاد آنها برابر شود. سپس برای بیان خطای اجماع با استفاده از ضرب کرونگر، دینامیک کلی عامل پیشرو را به صورت (۶) در نظر می‌گیریم. در اجماع تمامی متغیرهای حالت عامل‌های پیرو و پیشرو به همدیگر می‌رسند. برای رسیدن به این هدف، خطای اجماع تعریف می‌شود. زمانی که این خطا به صفر میل کند، تمامی متغیرهای حالت به هم می‌رسند. خطای اجماع برای عامل i ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_i(t) = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)) - b_i(x_i(t) - x_0(t)) \quad (7)$$

در فرمول (۷)، a_{ij} وزن میان عامل i ام و j ام است و b_i وزن میان عامل i ام و پیشرو است. خطای کلی اجماع با فرض $E(t) = [e_1(t) \ e_2(t) \ \dots \ e_n(t)]^T$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\dot{E}(t) = -(L + \bar{B}) \otimes I_n X(t) + (\bar{B} \otimes I_n) X_0(t) \quad (8)$$

در این رابطه ماتریس لاپلاسیین گراف مربوط به سیستم چندعاملی، با L و ماتریس مجاورت عامل‌های پیرو و عامل پیشرو با \bar{B} نشان داده می‌شوند. با این تعاریف، دینامیک کلی خطای اجماع به دست می‌آید:

$$\dot{E}(t) = -(L + \bar{B}) \otimes I_n X(t) + (\bar{B} \otimes I_n) X_0(t) \quad (9)$$

با استفاده از روابط (۳)، (۶) و (۹)، داریم:

دارد. عامل‌های پیرو با فرض $1 \leq i \leq N$

به صورت $x_i = [x_{i,1} \ x_{i,2} \ \dots \ x_{i,n}]^T$

عامل پیشرو به صورت $x_0 = [x_{0,1} \ x_{0,2} \ \dots \ x_{0,n}]^T$

نشان داده می‌شوند. با در نظر گرفتن مقدار تأخیر با d دینامیک عامل‌های پیرو به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$\dot{x}_i(t) = (A + \Delta_i)x_i(t) + (A_d + \Delta_{d,i})x_i(t-d) + Bu_i(t) \quad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, N$

در این رابطه $x_i(t)$ متغیر حالت عامل پیرو i ام است و $\Delta_{d,i}$ و Δ_i ماتریس‌های نامعین در ضرایب متغیرهای حالت عامل پیرو i ام هستند. همچنین، مقدار تأخیر در دینامیک عامل‌های پیرو را نشان می‌دهد و A ، A_d و B ماتریس‌هایی با المان‌های ثابت‌اند.

با در نظر گرفتن $\varphi_i(t)$ به عنوان شرط اولیه عامل پیرو i ام در بازه زمانی $[-h, 0]$ می‌توان نوشت:

$$x_i(t) = \varphi_i(t) \quad (2)$$

$t \in [-h, 0]$

با استفاده از ضرب کرونگر و با فرض

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \Delta_N \end{pmatrix}, \Delta_d = \begin{pmatrix} \Delta_{d,1} & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \Delta_{d,N} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \text{ و } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

دینامیک کلی عامل‌های پیرو به صورت زیر درمی‌آید:

و دینامیک عامل پیشرو عبارت است از:

$$\dot{X}(t) = (I_N \otimes A)X(t) + \Delta X(t) + (I_N \otimes A_d)X(t-d) + \Delta_d X(t-d) + (I_N \otimes B)U(t) \quad (3)$$

و دینامیک عامل پیشرو عبارت است از:

$$\dot{x}_0(t) = Ax_0(t) + A_d x_0(t-d) + Bu_0(t) \quad (4)$$

که در آن با در نظر گرفتن $\varphi_0(t)$ به عنوان شرایط اولیه عامل پیشرو در بازه زمانی $[-h, 0]$ ، داریم:

$$x_0(t) = \varphi_0(t) \quad (5)$$

$t \in [-h, 0]$

با تعریف کردن

$$p_1(t) = -[(L + \bar{B}) \otimes I_n] \{\Delta E(t)\},$$

$$p_2(t) = -[(L + \bar{B}) \otimes I_n] \{\Delta_d E(t-d)\} \text{ و } \bar{q}(t) = E(t)$$

سیستم خطای اجماع (۱۰) به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = (I_N \otimes A)E(t) + (I_N \otimes A_d)E(t-d) \\ -[(L + \bar{B}) \otimes I_n] \{(I_N \otimes B)U(t)\} \\ + (\bar{B} \otimes I_n)(I_N \otimes B)U_0(t) + p_1(t) + p_2(t) \\ \bar{q}(t) = Y(t) = E(t) \end{cases} \quad (14)$$

ساختار نامعینی نیز با توجه به تعاریف قبلی به صورت

زیر به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} = -[(L + \bar{B}) \otimes I_n] \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}(t) \\ \bar{q}(t-d) \end{bmatrix} \quad (15)$$

فرض می کنیم ورودی کنترلی به صورت زیر باشد،

قسمت اول این ورودی فیدبک حالت و قسمت دوم آن

برای حذف اثرات عامل پیشرو است:

$$U(t) = KE(t) + \{[(L + \bar{B}) \otimes I_n](I_N \otimes B)\}^+ (\bar{B} \otimes I_n)(I_N \otimes B)U_0(t) \quad (16)$$

در این رابطه K ماتریس بهره فیدبک حالت است. L

ماتریس لاپلاسی، \bar{B} ماتریس مجاورت عامل های پیرو با

عامل پیشرو و $E(t)$ خطای اجماع اند. با توجه به روابط

(۱۲) و (۱۶)، برای طراحی کنترل کننده باید مقدار دقیق

تأخیر مشخص باشد و همچنین فرض شده است کلیه

عوامل از لاپلاسین گروه آگاه اند.

۴-۱- قضیه

یک سیستم چندعاملی با یک عامل پیشرو و N عامل

پیرو در نظر بگیرید که در آن دینامیک عامل پیشرو

به صورت (۴) با شرایط اولیه (۵) و دینامیک عامل های پیرو

به صورت (۱) با شرایط اولیه (۲) است. در این صورت با

استفاده از کنترل کننده های (۱۲) و (۱۶) و با فرض زیر برای

نامعینی ها:

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= (I_N \otimes A)E(t) + (I_N \otimes A_d)E(t-d) \\ &- [(L + \bar{B}) \otimes I_n] \{\Delta E(t) + \Delta_d E(t-d) \\ &+ (I_N \otimes B)U(t)\} + (\bar{B} \otimes I_n)(I_N \otimes B)U_0(t) \end{aligned} \quad (10)$$

خروجی برای دینامیک خطا به صورت زیر در نظر

گرفته می شود:

$$Y(t) = E(t) \quad (11)$$

۳- طراحی کنترل کننده خطی ساز فیدبک

برای عامل پیشرو

در (۴) خطی ساز فیدبک را می توان به صورت زیر

طراحی کرد:

$$u_0(t) = B^+ \{-Ax_0(t) - A_dx_0(t-d) + A_0x_0(t) + x_d(t)\} \quad (12)$$

در (۱۲)، B^+ معکوس چپ ماتریس B و $x_d(t)$

مسیر مطلوب برای عامل پیشرو است. انتخاب ماتریس A_0

به عهده طراح است و برای پایدارسازی و دنبال روی عامل

پیشرو به کار می رود. با جایگذاری (۱۲) در (۴)، داریم:

$$\dot{x}_d(t) = A_0x_0(t) + x_d(t) \quad (13)$$

حال باید مقادیر ویژه ماتریس A_0 منفی باشد تا عامل

پیشرو مسیر $x_d(t)$ را دنبال کند. با توجه به توضیحات

ارائه شده در بخش پیوست، در این حالت متغیر حالت های

عامل پیشرو روی مسیر $e^{A_0t} * x_d(t)$ قرار می گیرند. حال

با توجه به اینکه A_0 ماتریس ثابتی است، e^{A_0t} نیز ثابت

است. در انتها نتیجه کانولوشن e^{A_0t} با $x_d(t)$ نیز

به صورت ضرب ثابتی از $x_d(t)$ به دست می آید.

۴- طراحی کنترل کننده اجماع پیرو - پیشرو

مقاوم

برای طراحی کنترل کننده اجماع، با توجه به اینکه در

دینامیک خطای اجماع (۱۰) نامعینی وجود دارد، باید از

کنترل کننده مقاوم استفاده شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}(t) \\ \bar{\mathbf{q}}(t-d) \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} \\ \|M\|_\infty \leq \gamma^{-1} &\rightarrow \|q\|_{L_2}^2 \leq \gamma^{-2} \|p\|_{L_2}^2 \\ \rightarrow \int_0^t (\mathbf{q}^T(\tau)\mathbf{q}(\tau) - \gamma^{-2} p^T(\tau)p(\tau)) d\tau &< 0 \end{aligned} \quad (21)$$

حال تابع لیاپانوف را با فرض G, H متقارن به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(t) = E^T(t)GE(t) + \int_{t-d}^t (E^T(\tau)HE(\tau)) d\tau \quad (22)$$

فرض می‌کنیم تابع لیاپانوف در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\dot{V}(t) + \mathbf{q}^T(t)\mathbf{q}(t) - \gamma^{-2} p^T(t)p(t) < 0 \quad (23)$$

با جایگذاری \dot{V} و q در (۲۳)، داریم:

$$\begin{aligned} \dot{E}^T(t)GE(t) + E^T(t)G\dot{E}(t) + E^T(t)HE(t) \\ - E^T(t-d)HE(t-d) + E^T(t)E(t) \\ + E^T(t-d)E(t-d) - \gamma^{-2} p^T(t)p(t) < 0 \end{aligned} \quad (24)$$

با جایگذاری \dot{E} در (۲۴)، داریم:

$$\begin{aligned} E^T(t)A_1^TGE(t) + E^T(t-d)A_2^TGE(t) \\ + p_1^T(t)GE(t) + p_2^T(t)GE(t) \\ + E^T(t)GA_1E(t) + E^T(t)GA_2E(t-d) \\ + E^T(t)Gp_1(t) + E^T(t)Gp_2(t) \\ + E^T(t)HE(t) - E^T(t-d)HE(t-d) \\ + E^T(t)E(t) + E^T(t-d)E(t-d) \\ - \gamma^{-2} p_1^T(t)p_1(t) - \gamma^{-2} p_2^T(t)p_2(t) < 0 \end{aligned} \quad (25)$$

در نهایت، (۲۴) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} E(t) \\ E(t-d) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_1^T G + GA_1 + H + I & GA_2 & G & G \\ A_2^T G & -H + I & 0 & 0 \\ G & 0 & -\gamma^{-2} I & 0 \\ G & 0 & 0 & -\gamma^{-2} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(t) \\ E(t-d) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

برای اینکه شرط (۲۶) محقق شود، باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \|[L + \bar{B}] \otimes I_n \Delta\|_\infty &\leq \alpha, \\ \|[L + \bar{B}] \otimes I_n \Delta_d\|_\infty &\leq \beta, \\ \max(\alpha, \beta) &= \gamma \end{aligned} \quad (17)$$

عامل پیشرو مسیر $x_d(t)$ را دنبال می‌کند و با نامعینی‌های موجود در دینامیک عامل‌های پیرو و همچنین تأخیر در دینامیک این عامل‌ها، اجماع پیرو - پیشرو انجام می‌گیرد. مقدار حداقل برای پارامتر γ با حل یک مسئله بهینه‌سازی LMI به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \min(\gamma) \\ s.t. \begin{cases} W < 0 \\ \Omega > 0 \\ \Gamma > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن، Ω و Γ ماتریس‌های متقارن بوده و

همچنین:

$$W = \begin{bmatrix} \Omega A_{11}^T + \Lambda^T A_{12}^T + A_{11} \Omega + A_{12} \Lambda + \Gamma + 2\gamma^2 I & A_2 \Omega & \Omega & 0 \\ \Omega A_{12}^T & -\Gamma & 0 & \Omega \\ \Omega & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & \Omega & 0 - I \end{bmatrix}$$

در ماتریس بالا $\Lambda = K\Omega$ و $A_{11} = (I_N \otimes A)$ و $A_2 = (I_N \otimes A_d)$ و $A_{12} = -[(L + \bar{B}) \otimes I_n](I_N \otimes B)$ هستند.

۴-۲- اثبات قضیه

با اعمال ورودی‌های کنترلی (۱۲) و (۱۶) به دینامیک خطا (۱۴)، داریم:

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= (I_N \otimes A_d)E(t-d) + p_1(t) + p_2(t) \\ &+ \{(I_N \otimes A) - [(L + \bar{B}) \otimes I_n](I_N \otimes B)K\}E(t) \end{aligned} \quad (19)$$

با فرض:

$$\begin{aligned} A_1 &= (I_N \otimes A) - [(L + \bar{B}) \otimes I_n](I_N \otimes B)K \\ \text{و } A_2 &= (I_N \otimes A_d) \text{ به صورت زیر است:} \\ \begin{cases} \dot{E}(t) = A_1 E(t) + A_2 E(t-d) + p_1(t) + p_2(t) \\ \bar{\mathbf{q}}(t) = E(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

همچنین، طبق قضیه بهره کوچک و با تعریف

$$\begin{bmatrix} \Omega A_1^T + A_1^T \Omega + A_1 \Omega + A_2 \Lambda + \Gamma + 2\gamma^2 I & A_2 \Omega & \Omega & 0 \\ \Omega A_2^T & -\Gamma & 0 & \Omega \\ \Omega & 0 & -I & 0 \\ 0 & \Omega & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} A_1^T G + G A_1 + H + I & G A_2 & G & G \\ A_2^T G & -H + I & 0 & 0 \\ G & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ G & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

بنابراین، مسئله بهینه سازی LMI به صورت (۱۸) تعریف می شود. از حل این مسئله بهینه سازی، بهره فیدبک حالت بهینه به صورت زیر محاسبه می شود:

$$K_{opt} = \Lambda_{opt} \Omega_{opt}^{-1} \quad (34)$$

باید توجه داشت ماتریس ضرایب موجود در دینامیک عامل های پیرو، نامعینی دارند و محدوده این نامعینی از قبل نامشخص است؛ بنابراین، در طراحی مطابق (۱۷) فرض می کنیم حد بالای نامعینی ها، مقادیر آلفا و بتا دارند و در حقیقت با حل مسئله بهینه سازی (۱۸) به دنبال یافتن مقادیری برای این حدود بالا هستیم. بدیهی است پس از طراحی یک مقدار حداقل برای گاما، شبیه سازی ها برای مقادیر ثابتی از آلفا و بتا انجام می شود که براساس رابطه (۱۷) از مقدار به دست آمده برای گاما کمترند.

با ضرب طرفین نامساوی بالا در

$$\begin{bmatrix} G^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

و با تعریف کردن ماتریس متقارن $\Omega = G^{-1}$ ، داریم:

$$\begin{bmatrix} \Omega A_1^T + A_1 \Omega + \Omega H \Omega + \Omega^2 & A_2 \Omega & I & I \\ \Omega A_2^T & -\Omega H \Omega + \Omega^2 & 0 & 0 \\ I & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ I & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

با فرض $\Gamma = \Omega H \Omega$ و با استفاده از متمم شور، داریم:

$$\begin{bmatrix} \Omega A_1^T + A_1 \Omega + \Gamma + \Omega^2 & A_2 \Omega \\ \Omega A_2^T & -\Gamma + \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

با ساده سازی (۲۹)، داریم:

$$\begin{bmatrix} \Omega A_1^T + A_1 \Omega + \Gamma + \Omega^2 + 2\gamma^2 I & A_2 \Omega \\ \Omega A_2^T & -\Gamma + \Omega^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

برای حل این نامساوی باید ترم های درجه دوم با ترم های درجه اول جایگزین شود. برای اینکار ترم های درجه دوم را بیرون می کشیم:

$$\begin{bmatrix} \Omega A_1^T + A_1 \Omega + \Gamma + 2\gamma^2 I & A_2 \Omega \\ \Omega A_2^T & -\Gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

برای معادله (۳۱) دوباره از متمم شور استفاده می شود:

$$\begin{bmatrix} \Omega A_1^T + A_1 \Omega + \Gamma + 2\gamma^2 I & A_2 \Omega & \Omega & 0 \\ \Omega A_2^T & -\Gamma & 0 & \Omega \\ \Omega & 0 & -I & 0 \\ 0 & \Omega & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

و برای ساده سازی با فرض $\Lambda = K \Omega$

$$A_{11} = (I_N \otimes A)$$

و

$$A_{12} = -[(L + \bar{B}) \otimes I_n](I_N \otimes B)$$

داریم:

۵- شبیه سازی

از مرجع [23] سیستم تأخیردار زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = z(t) \\ \dot{z}(t) = x(t-1) + 2y(t-1) + 3z(t-1) + z(t) + u(t) \end{cases} \quad (35)$$

شرایط اولیه نیز به صورت زیر داده شده است:

$$\begin{cases} x(t) = 0, -1 \leq t \leq 0 \\ y(t) = 0, -1 \leq t \leq 0 \\ z(t) = 0, -1 \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (36)$$

حال پارامترهای دینامیک عامل های پیرو که در (۱) و (۲) داده شده است را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$d = h = 1, n = 3, N = 3, \varphi_i(t) = 0$$

نامعینی‌های رابطه (۱۷) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1\sin(10t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2\sin(10t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\Delta_{d,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.1\sin(10t) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از شکل (۱)، ماتریس لاپلاسی و ماتریس مجاورت گراف را مطابق رابطه زیر می‌توان تشکیل داد:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

ورودی کنترلی برای عامل نام به صورت زیر به دست آمده است:

$$u_1(t) = 3(6x_{0,1} + 11x_{0,2} + 6x_{0,3}) + 100E_{1,1} + 10E_{1,2} + 35E_{1,3}$$

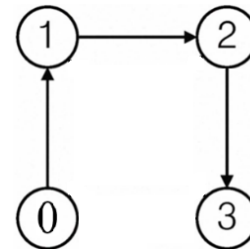
$$u_2(t) = 100E_{2,1} + 10E_{2,2} + 35E_{2,3} \quad (41)$$

$$u_3(t) = 100E_{3,1} + 10E_{3,2} + 35E_{3,3}$$

با مقادیر ویژه $\{-1, -2, -3\}$ برای ماتریس A_0 ، ابتدا برای عامل پیشرو با استفاده از کنترل‌کننده خطی‌ساز فیدبک در (۱۲) ورودی کنترلی عامل پیشرو به صورت زیر تعیین می‌شود:

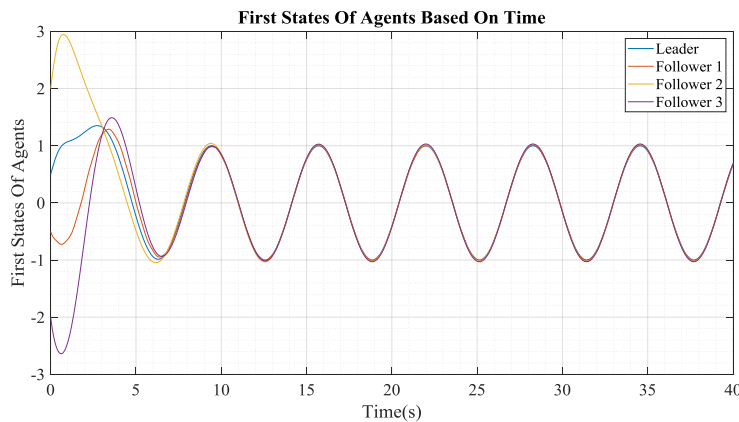
$$u_0(t) = -6x(t) - 11y(t) - 6z(t) + x_d(t) \quad (39)$$

در (۳۹) مسیر مطلوب به صورت $x_d(t) = 10\sin(t)$ و گراف متناظر با سیستم چندعاملی به صورت شکل (۱) در نظر گرفته شد. این گراف، سه عامل پیرو و یک عامل پیشرو دارد که مطابق شکل با یکدیگر در ارتباط هستند:

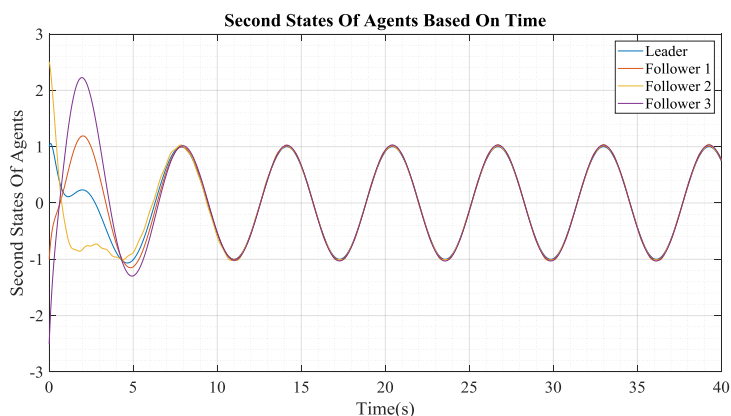


شکل (۱): گراف سیستم چندعاملی

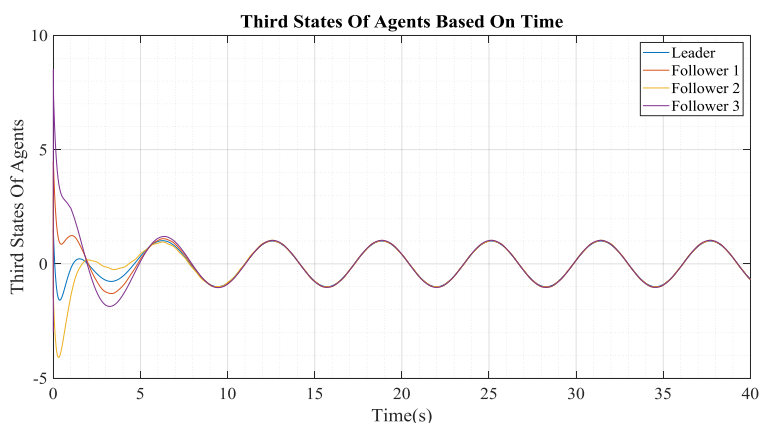
در رابطه (۴۱)، $E_{i,j}$ نشان‌دهنده خطای اجماع متغیر حالت j از عامل i است. حال نتایج حاصل از اعمال این ورودی‌ها به سیستم چندعاملی به صورت زیر نشان داده می‌شوند. با توجه به شکل (۲)، (۳)، و (۴) متغیرهای حالت عامل‌های پیرو در زمان محدود و در ثانیه نهم به متغیر حالت عامل پیشرو می‌رسند و این کنترل‌کننده توانایی حذف نامعینی‌های موجود در سیستم را دارد.



شکل (۲): متغیرهای حالت اول از عامل‌های پیرو و عامل پیشرو

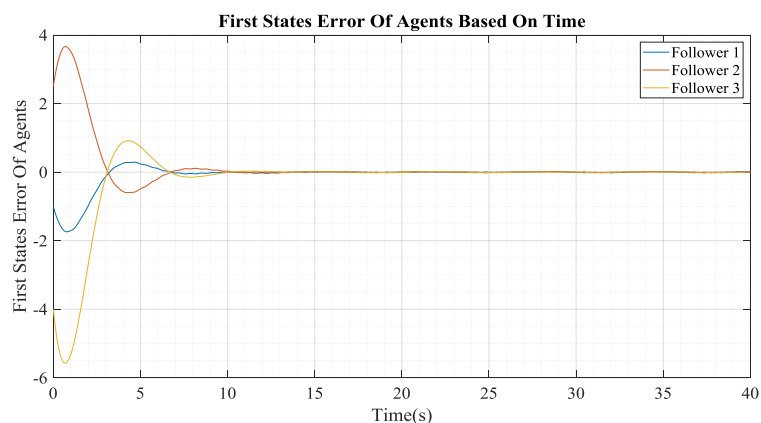


شکل (۳): متغیرهای حالت دوم از عامل‌های پیرو و عامل پیشرو

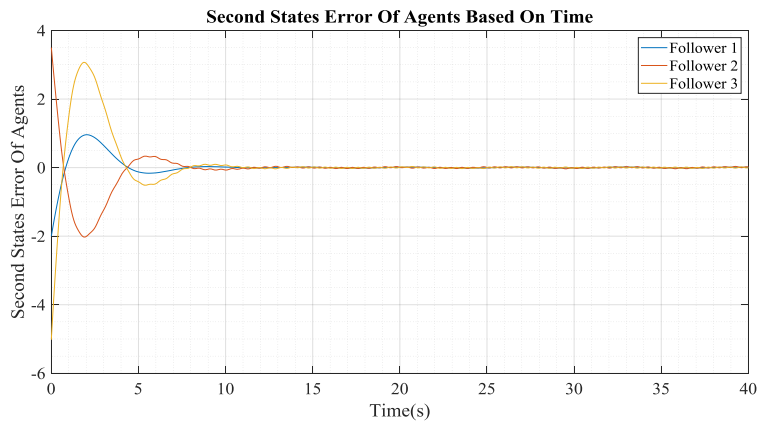


شکل (۴): متغیرهای حالت سوم از عامل‌های پیرو و عامل پیشرو

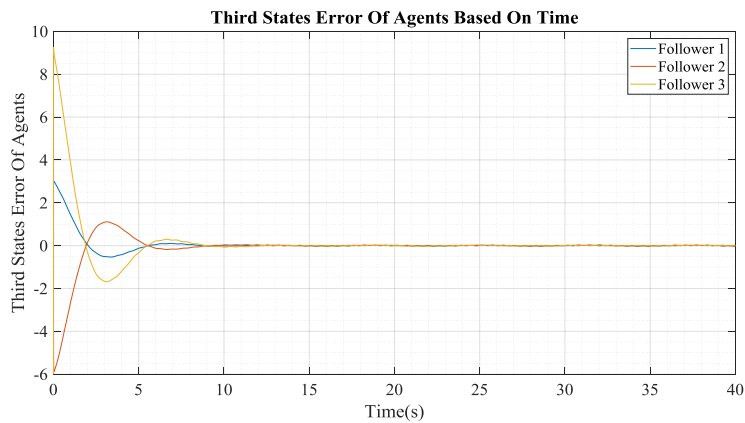
در ادامه خطای اجماع برای عامل‌های پیرو نشان داده شده است. در شکل (۵)، (۶)، و (۷) دیده می‌شود در زمان ۹ ثانیه خطا به صفر رسیده است و اجماع عامل‌ها انجام می‌شود. این نتیجه با شکل‌های (۲)، (۳)، و (۴) نیز مطابقت دارد.



شکل (۵): خطای اجماع متغیرهای حالت اول از عامل‌های پیرو

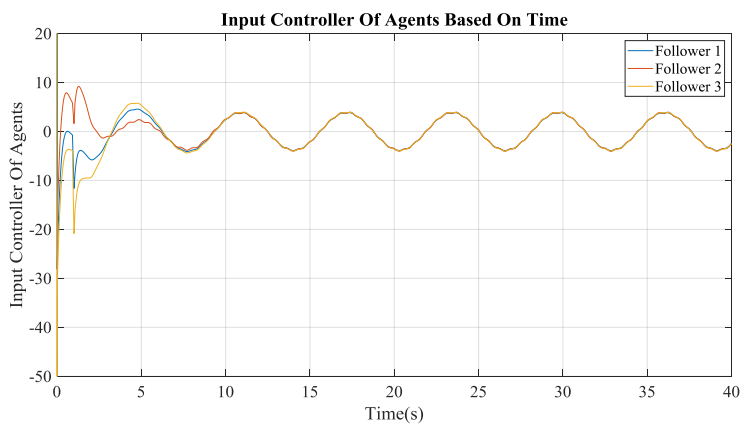


شکل (۶): خطای اجماع متغیرهای حالت دوم از عامل های پیرو



شکل (۷): خطای اجماع متغیرهای حالت سوم از عامل های پیرو

همچنین ورودی کنترلی این سه عامل پیرو در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل (۸): ورودی های کنترلی عامل های پیرو

همان طور که از شکل (۸) مشخص است، این ورودی ها محدود و اعمال پذیرند.

۶- نتیجه گیری

و N عامل پیرو بررسی شده است. با استفاده از کنترل کننده خطی ساز فیدبک، رفتار عامل پیشرو به سمت مسیر مطلوب هدایت شد. در ضرایب ماتریس حالت ها، ضرایب ماتریس

در این مقاله، یک سیستم چندعاملی با یک عامل پیشرو

فرض کنید $B \in R^{m \times n}$ و $m \neq n$ باشد. با توجه به مقدار m و n ، معکوس چپ و راست ماتریس B به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} m > n \rightarrow B^+ = (B^T B)^{-1} B^T \\ m < n \rightarrow B^+ = B^T (B B^T)^{-1} \end{cases} \quad (45)$$

اثبات نحوه همگرایی دینامیک عامل پیشرو به مسیر مرجع: دینامیک عامل پیشرو پس از اعمال کنترل کننده به صورت زیر است:

$$\dot{x}_0(t) = A_0 x_0(t) + x_d(t), x_0(t_0) = C \quad (46)$$

می دانیم جواب عمومی معادله همگن $\dot{x}_0(t) = A_0 x_0(t), x_0(t_0) = C$ به صورت $x_c(t) = C e^{A_0(t-t_0)}$ است. حال فرض کنیم جواب خصوصی معادله غیرهمگن به صورت $x_p(t) = G(t) e^{A_0 t}$ باشد؛ در نتیجه، مشتق جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$\dot{x}_p(t) = G'(t) e^{A_0 t} + A_0 G(t) e^{A_0 t} \quad (47)$$

با جایگذاری مشتق جواب خصوصی در معادله غیرهمگن، داریم:

$$G'(t) e^{A_0 t} + A_0 G(t) e^{A_0 t} = A_0 G(t) e^{A_0 t} + x_d(t) \quad (48)$$

از طرفین رابطه $G'(t) = e^{-A_0 t} x_d(t)$ انتگرال می گیریم:

$$G(t) = \int_{t_0}^t e^{-A_0 s} x_d(s) ds \quad (49)$$

در نتیجه، جواب خصوصی به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= e^{A_0 t} \int_{t_0}^t e^{-A_0 s} x_d(s) ds = \\ &\int_{t_0}^t e^{A_0(t-s)} x_d(s) ds = e^{A_0 t} * x_d(t) \end{aligned} \quad (50)$$

در نهایت، جواب عمومی معادله غیرهمگن به صورت $x_0(t) = x_c(t) + x_p(t)$ به دست می آید.

$$x_0(t) = C e^{A_0(t-t_0)} + e^{A_0 t} * x_d(t) \quad (51)$$

تأخیریافته حالت های عامل های پیرو، ضرایب ماتریس خطای اجماع و همچنین ضرایب ماتریس تأخیریافته خطای اجماع، نامعینی در نظر گرفته شد و برای حذف این نامعینی ها یک کنترل کننده مقاوم H_∞ طراحی شد. برای این منظور با استفاده از نامعادلات ماتریسی خطی، جواب مسئله به فرم LMI تحلیل شد. در نهایت، نتایج به دست آمده روی یک سیستم چندعاملی با دینامیک داده شده با سه عامل پیرو و یک عامل پیشرو پیاده سازی شدند. نتایج شبیه سازی، کارایی و پایداری این کنترل کننده را نشان می دهند.

۷- پیوست

لم شور: فرض کنید توابع ماتریسی $Q(x)$ ، $R(x)$ و $S(x)$ وجود داشته باشند. در این صورت هر سه عبارت زیر معادل هم هستند.

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (42)$$

$$\begin{cases} Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0 \\ R(x) > 0 \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \quad (44)$$

تعاریف پایه ای گراف: سیستم چندعاملی را با یک گراف مدل می کنند. ماتریس مجاورت گراف با توجه به گراف سیستم چندعاملی، تشکیل و با A نام گذاری می شود. این ماتریس نحوه ارتباط بین عامل ها را بیان می کند. ماتریس D ، یک ماتریس قطری است که عناصر روی قطر اصلی آن، مجموع عناصر سطری ماتریس مجاورت گراف است. ماتریس لاپلاسین گراف، به صورت $L = D - A$ تعریف می شود. شرط لازم برای اجماع وجود حداقل یک درخت پوشا در گراف متناظر با سیستم چندعاملی است. نخستین مقدار ویژه ماتریس L همیشه صفر است؛ یعنی $\lambda_1 = 0$ است. دومین مقدار ویژه ماتریس L ، مقدار ویژه فیدلر λ_2 نامیده می شود. اگر گراف یک درخت پوشا داشته باشد، آنگاه $|\lambda_2| > 0$ است. تعریف معکوس چپ و راست ماتریس های غیرمربعی:

tracking for a class of high-order multi-agent systems”, International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol.26, No. 3, pp. 578-598, 2016.

- [11] P. Lin, Y. Jia, “Robust H_∞ consensus analysis of a class of second-order multi-agent systems with uncertainty”, IET control theory & applications, Vol. 4, No. 3, pp. 487-498, 2010.
- [12] W. Zhang, Z. Wang, Y. Guo, “Robust consensus for uncertain multi-agent systems on directed communication topologies”, 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), pp. 6317-6322, 2010.
- [13] Y. Liu, Y. Jia, “Robust H_∞ consensus control of uncertain multi-agent systems with time delays”, International Journal of Control, Automation and Systems, Vol. 9, No. 6, pp. 1086-1094, 2011.
- [14] P. Lin, Y. Jia, L. Li, “Distributed robust H_∞ consensus control in directed networks of agents with time-delay”, Systems & Control Letters, Vol. 57, No. 8, pp. 643-653, 2008.
- [15] Y. Chen, J. Lü, X. Yu, “Robust consensus of multi-agent systems with time-varying delays in noisy environment”, Science China Technological Sciences, Vol. 54, No. 8, pp. 2014-2023, 2011.
- [16] D. Han, G. Chesi, Y. S. Hung, “Robust consensus for a class of uncertain multi-agent dynamical systems”, IEEE Transactions on Industrial Informatics, Vol. 9, No. 1, pp. 306-312, 2013.
- [17] H. Y. Yang, L. Guo, H. L. Zou, “Robust consensus of multi-agent systems with time-delays and exogenous disturbances”, International Journal of Control, Automation and Systems, Vol. 10, No. 4, pp. 797-805, 2012.
- [18] Y. H. Lan, B. Wu, Y. X. Shi, Y. P. Luo, “Iterative learning-based consensus control for distributed parameter multi-agent systems with time-delay”, Neurocomputing, Vol. 357, pp. 77-85, 2019.
- [19] X. Zong, T. Li, J. F. Zhang, “Consensus control of second-order delayed multiagent systems with intrinsic dynamics and measurement noises”, International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 28, issue. 16, pp. 5050-5070, 2018.
- [20] Y. Feng, W. X. Zheng, “Adaptive tracking control for nonlinear heterogeneous multi-agent systems with unknown dynamics”, Journal of the Franklin Institute, Vol. 356, issue. 5, pp. 2780-2797, 2019.
- [21] J. Chen, J. Li, X. Yuan, “Global fuzzy adaptive consensus control of unknown nonlinear multi-agent systems”, IEEE

حال اگر مقادیر ویژه A_0 منفی باشد، دینامیک عامل

پیشرو به $e^{A_0 t} * x_d(t)$ همگرا می‌شود.

مراجع

- [1] S. Dimitrov, A. A. Ceder, M. Monot, “Modeling the Interaction Between Buses, Passengers and Cars on a Bus Route Using Multi-Agent System”, Transportation Research Board 95th Annual Meeting, No. 16-1169, 2016.
- [2] Y. Tang, X. Xing, H. R. Karimi, L. Kocarev, J. Kurths, “Tracking control of networked multiagent systems under new characterizations of impulses and its applications in robotic systems”, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 63, No. 2, pp. 1299-1307, 2016.
- [3] Z. Zuo, L. Tie, “Distributed robust finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems”, International Journal of Systems Science, vol. 47, no. 6, pp. 1366-1375, 2016.
- [4] D. Wang, N. Zhang, J. Wang, W. Wang, “A PD-like protocol with a time delay to average consensus control for multi-agent systems under an arbitrarily fast switching topology”, IEEE transactions on cybernetics, Vol. 47, No. 4, pp. 898-907, 2017.
- [5] W. He, B. Zhang, Q. L. Han, F. Qian, J. Kurths, J. Cao, “Leader-following consensus of nonlinear multiagent systems with stochastic sampling”, IEEE transactions on cybernetics, Vol. 47, No. 2, pp. 327-338, 2017.
- [6] D. Yang, W. Ren, X. Liu, W. Chen, “Decentralized event-triggered consensus for linear multi-agent systems under general directed graphs”, Automatica, vol. 69, pp. 242-249, 2016.
- [7] L. Cheng, Y. Wang, W. Ren, Z. G. Hou, M. Tan, “On convergence rate of leader-following consensus of linear multi-agent systems with communication noises”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 61(11), pp. 3586-3592, 2016.
- [8] G. Hu, “Robust consensus tracking of a class of second-order multi-agent dynamic systems”, Systems & Control Letters, vol. 61, no. 1, pp. 134-142, 2012.
- [9] G. Hu, “Robust consensus tracking for an integrator-type multi-agent system with disturbances and unmodelled dynamics”, International journal of control, Vol. 84, No. 1, pp. 1-8, 2011.
- [10] C. Sun, G. Hu, L. Xie, “Robust consensus

- 45-58, 2020.
- [1] [23] Z. Rafiei, B. Kafash, S. M. Karbassi, "State control parameterization method based on using hybrid functions of block-pulse and Legendre polynomials for optimal control of linear time delay systems", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 45, pp. 1008-1019, 2017.
- Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 28, issue. 3, pp. 510-522, 2019.
- [22] H. N. Soloklo, H. Zarabadipour, "Order Reduction of Unstable Systems by Minimizing the Multi Objective Weighted Sum Function ITSE and H_∞ Norm with Bat Algorithm", *Computational Intelligence in Electrical Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp.