



Computational Intelligence in Electrical Engineering
Vol. 11, No. 4, 2021
Research Paper

A New Adaptive Algorithm for Spectral Unmixing in Hyperspectral Images

Gholamreza Bakhshi¹, Kamal Shahtalebi¹, Mehdi Momeni²

¹ Dept. of Electrical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

² Dept. of Geomatics Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

Abstract:

In this paper, a novel adaptive algorithm for spectral unmixing in hyperspectral images (HSIs) is proposed. Many of the existing spectral unmixing algorithms, under the assumption of the linear model for the spectral mixing phenomenon, attempt to estimate the signatures of available materials in the observed HSI image. Then, based on the similarity between the estimated spectral signatures and the available spectral signatures in the spectral library, they identify the materials in the HSI and estimate their relative abundances. While the spectral library, as prior knowledge, has not been directly considered in the founding of existing algorithms, the proposed method is directly concentrated on the spectral signatures library. Assuming the linear spectral mixing model, the proposed method takes a set of spectral signatures which are probably present in the observed HSI. Then, based on a non-statistical approach, the normalized least mean square (NLMS) adaptive algorithm is engaged to estimate a weight vector for each spectral signature in the selected set in such a way that each weight vector and its corresponding spectral signature are non-orthogonal whereas the weight vector of each spectral signature is almost orthogonal to the other spectral signatures. A synthetic dataset of hyperspectral images is considered to evaluate the performance of the proposed method. The evaluation results show that the proposed method outperforms its counterparts in low signal to noise ratio (SNR).

Keywords: Spectral Unmixing, Hyperspectral Images, Spectral Library, NLMS Algorithm, Linear Spectral Mixing Model.



2252-083X/ © 2021 The Authors. Published by University of Isfahan

This is an open access article under the CC BY-NC-ND/4.0/ License (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



<http://dx.doi.org/10.22108/isee.2020.115712.1195>

ارائه یک الگوریتم وفقی به منظور تجزیه طیفی مواد در تصاویر فراطیفی

غلامرضا بخشی^۱، کمال شاه‌طالبی^۲، مهدی مؤمنی^۳

۱- فارغ‌التحصیل دکتری، گروه مهندسی برق - دانشگاه اصفهان - اصفهان - ایران

bakhshi@eng.ui.ac.ir

۲- دانشیار، گروه مهندسی برق - دانشگاه اصفهان - اصفهان - ایران

shahtalebi@eng.ui.ac.ir

۳- دانشیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری - دانشگاه اصفهان - اصفهان - ایران

momeni@eng.ui.ac.ir

چکیده: در این مقاله، روش پردازشی نوینی به منظور تجزیه طیفی مواد در تصاویر فراطیفی ارائه شده است. بیشتر روش‌های تجزیه طیفی موجود با فرض مدل خطی برای پدیده اختلاط طیفی، تلاش می‌کنند با ارائه الگوریتم‌هایی، امضای طیفی مواد موجود احتمالی را در تصویر فراطیفی مشاهده‌شده تخمین بزنند و صرفاً با مقایسه آنها با امضاهای طیفی موجود در کتابخانه طیفی و بر مبنای مشابهت طیفی، به نوع ماده تشکیل‌دهنده تصویر پی ببرند؛ درحالی‌که کتابخانه طیفی، به‌منزله دانش قبلی و اتکاپذیر، اطلاعات ارزشمندی در اختیار ما قرار می‌دهد. گفتنی است در پایه‌ریزی الگوریتم‌های موجود، کمتر به این کتابخانه توجه شده است. استفاده مستقیم از اطلاعات کتابخانه طیفی، اساس روش پیشنهادی در این مقاله است. در روش پیشنهادی و با فرض مدل خطی برای پدیده اختلاط طیفی، مسئله تجزیه طیفی با یک مدل خطی و تغییرناپذیر با زمان و بدون هرگونه فرض آماری بر مجموعه‌ای از امضاهای طیفی موجود در کتابخانه طیفی، مدل‌سازی می‌شود. بردار وزن این مدل برای هر کدام از امضاهای طیفی حاضر در مجموعه انتخاب‌شده، با الگوریتم کمترین میانگین مربعات نرمالیزه‌شده (Normalized Least Mean Square: NLMS) تخمین زده می‌شود؛ به‌گونه‌ای که امضای طیفی هر ماده و بردار وزن متناظر با آن، یک زوج به‌شدت نامتعامل را تشکیل می‌دهند؛ درحالی‌که این بردار وزن بر امضای طیفی سایر مواد تقریباً عمود است. به‌منظور ارزیابی عملکرد الگوریتم پیشنهادی و مقایسه آن با الگوریتم‌های دیگر، از مجموعه داده فراطیفی و سنتز شده مبتنی بر فراکتال‌ها استفاده شده که برای همین منظور تهیه شده است. دو ویژگی مهم الگوریتم NLMS، یعنی مقاوم‌بودن و توانایی تشخیص سریع تغییرات پارامتر باعث می‌شود الگوریتم پیشنهادی نسبت به نویز و تغییرات طیفی، مقاوم و در مقایسه با الگوریتم‌های دیگر، عملکرد بهتری در نسبت‌های سیگنال به نویز (SNR) پایین داشته باشد.

واژه‌های کلیدی: اختلاط طیفی، الگوریتم NLMS، تجزیه طیفی، تصاویر فراطیفی، کتابخانه طیفی، مدل خطی

۱- مقدمه

تحولات پیش‌آمده در سطح زمین یا اتمسفر، داده‌های سنسجش از دور بسیار شایان توجه و پرکاربرد بوده‌اند. این داده‌ها از نظر زمانی، مکانی و طیفی دربردارنده اطلاعات بوده و به‌سرعت توسعه یافته‌اند. از جمله این داده‌ها، تصاویر فراطیفی (Hyperspectral Images) هستند که نتیجه عکس‌برداری حس‌گرهای فراطیفی در طول موج‌های مختلف (معمولاً در محدوده فروسرخ تا ماوراء بنفش) از سطح زمین‌اند که در نهایت به تولید مکعب تصویر فراطیفی

طی چند دهه گذشته و به‌منظور رصد پدیده‌ها و

^۱ تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۱۲/۰۶

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۴/۱۵

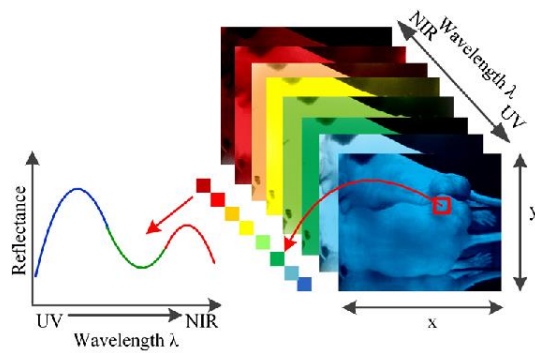
نام نویسنده مسئول: کمال شاه‌طالبی

نشانی نویسنده مسئول: ایران - اصفهان - دانشگاه اصفهان -

دانشکده فنی و مهندسی - گروه مهندسی برق

متفاوتی دارند. امضاهای طیفی با اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی یا اندازه‌گیری‌های میدانی به دست می‌آیند و به صورت کتابخانه طیفی در دسترس‌اند. از مشهورترین کاربردی‌ترین کتابخانه‌های طیفی جهان کتابخانه United State Geological Survey (USGS) است. طی فرایند تصویربرداری فراطیفی، پدیده‌های مختلفی مانند شرایط جوی، نویز حس‌گرها، وجود مواد ترکیبی در محیط، موقعیت محل تصویربرداری و عوامل متعدد دیگر باعث تغییر پاسخ طیفی می‌شوند [3]. به عبارت دیگر، پاسخ طیفی به دست‌آمده از سنجنده در حال تصویربرداری با پاسخ طیفی حاصل از اندازه‌گیری آزمایشگاهی یا میدانی تفاوت دارد. یکی از موارد فوق، اختلاط طیفی (Spectral Mixing) است که باعث ایجاد پیکسل‌های ترکیبی به جای پیکسل‌های خالص می‌شود. به بیان دیگر، پیکسل خالص، پیکسلی است که پاسخ طیفی آن ناشی از حضور یک ماده است؛ درحالی‌که در پیکسل ترکیبی حضور چند ماده مختلف در پاسخ طیفی آن اثر می‌گذارند. روش‌های مختلفی برای مدل‌سازی این پدیده پیشنهاد شده است که هر کدام به اقتضای شرایط خاص کاربرد دارند. در بین آنها مدل ترکیب خطی، مدلی است که به صورت گسترده استفاده می‌شود و بر این پایه استوار است که پاسخ طیفی مشاهده‌شده برای هر پیکسل در یک تصویر فراطیفی، ترکیب خطی از امضای طیفی مواد موجود در آن است [4]. هر کدام از مواد تشکیل‌دهنده یک پیکسل، عضو (Endmember) نامیده می‌شوند. طی دهه‌های گذشته، الگوریتم‌های بسیاری به منظور تجزیه طیفی مواد به کمک تصاویر فراطیفی و با فرض مدل خطی برای پدیده اختلاط طیفی، معرفی و به کار گرفته شده‌اند. این الگوریتم‌ها به سه دسته کلی تقسیم‌بندی می‌شوند: نخست، الگوریتم‌های آماری که به دلیل پیچیدگی محاسباتی بسیار زیاد و نیاز به دانش قبلی درباره توزیع آماری مشاهدات چندان درخور توجه نیستند. دوم، الگوریتم‌های مبتنی بر هندسه مسئله که به دلیل کارایی مناسب بسیار درخور توجه‌اند و سوم، الگوریتم‌هایی که بر فرض تنگ بودن مسئله استوارند. از دیدگاه هندسی، تصاویر فراطیفی به صورت Simplex تصور می‌شوند و بر اساس این، الگوریتم‌های

منجر می‌شوند [1]. یک مکعب تصویر فراطیفی، نوعی داده سه‌بعدی محسوب می‌شود و دارای دو بعد مکانی و یک بعد طیفی است؛ به گونه‌ای که هر باند طیفی، یک تصویر دوبعدی از مکان را شامل می‌شود. از نگاهی دیگر، هر پیکسل از یک مکعب فراطیفی، یک بردار طیفی است که طول آن به اندازه تعداد باندهای طیفی تصویر و هر المان آن بیان‌کننده میزان انعکاس در طول موج متناظر است. یک مثال از مکعب تصویر فراطیفی در شکل (۱) نشان داده شده است. در تصاویر فراطیفی، تفکیک‌پذیری مکانی در مقایسه با تفکیک‌پذیری طیفی بسیار کمتر است. در واقع، بعد طیفی این تصاویر، باندهای بسیار باریک (در حدود ۱۰ نانومتر) در محدوده نور مرئی تا حدود فروسرخ (طول موج بین ۰,۳ تا ۲,۵ میکرومتر) را شامل می‌شود. در حوزه علوم سنجش از دور، تصاویر فراطیفی، نقش عمده‌ای دارند و خیل کاربردهای گسترده آن عبارت‌اند از: شناسایی مواد معدنی، تعیین مشخصات پوشش سطح زمین و مشاهده وضعیت سلامت محصولات کشاورزی [1,2].



شکل (۱): یک نمونه از مکعب تصویر فراطیفی

تجزیه طیفی مواد به کمک تصاویر فراطیفی، یکی دیگر از کاربردهای اینگونه تصاویر است. اصولاً مسئله تجزیه طیفی مواد به شناسایی مواد تشکیل‌دهنده هر پیکسل از تصویر فراطیفی و میزان فراوانی نسبی آنها می‌پردازد. هر کدام از مواد موجود در طبیعت دارای یک امضای طیفی مشخص‌اند که پاسخ طیفی آن ماده است. امضای طیفی از ویژگی‌های فیزیکی و منحصر به فرد هر ماده محسوب می‌شود. به عبارت دیگر، مواد مختلف، امضای طیفی

که به کمک روش‌های برنامه‌ریزی خطی، حل‌شدنی است. مشکل روش‌های مبتنی بر هندسه تصاویر فراطیفی این است که در صورت زیاد شدن تعداد مواد موجود در پیکسل، تفکیک طیفی با شکست مواجه می‌شود [11].

در سال‌های اخیر، ویژگی تنگ‌بودن مشاهدات در حل مسئله تفکیک طیفی بررسی شده است. روش‌های تنگ‌بر این فرض استوارند که هر پیکسل از تصویر فراطیفی مشاهده‌شده شامل تعداد بسیار کمی از موادند که به صورت خطی ترکیب شده‌اند. در روش‌های تنگ تلاش می‌شود از اطلاعات کتابخانه طیفی به‌عنوان دانش قبلی و اتکاپذیر، به نوعی در پایه‌ریزی الگوریتم استفاده شود. بیشتر الگوریتم‌های تنگ با یک مسئله بهینه‌سازی غیرمحدب از نوع ℓ_0 مواجه‌اند که حل آن معمولاً امکان‌پذیر نیست و تلاش می‌کنند با در نظر گرفتن فرضیه‌هایی به پاسخ‌های شبه‌بهینه بسنده کنند یا مسئله را با یک مسئله بهینه‌سازی محدب از نوع ℓ_1 مدل‌سازی کنند. در [11] تلاش شده است مسئله بهینه‌سازی از نوع ℓ_0 به صورت تقریبی و با استفاده از الگوریتم‌های حریمانه حل شود و تفکیک طیفی صورت پذیرد. مشکل بیشتر روش‌های تنگ از جمله روش‌های مبتنی بر الگوریتم‌های حریمانه این است که به دلیل وجود شباهت بین امضای طیفی مواد مختلف در کتابخانه طیفی (شباهت طیفی)، به پاسخ بهینه یا شبه‌بهینه مناسب همگرا نمی‌شوند [12]. نویسندگان در [13] مسئله ℓ_0 را با مسئله ℓ_1 هموارشده، جایگزین و آن را با استفاده از الگوریتم‌های مبتنی بر لاگرانژین حل کرده‌اند. در [14] و به‌منظور غلبه بر مشکل شباهت طیفی، روشی ارائه شده است که بر مبنای در اختیار داشتن یک دانش اضافی از منطقه تحت تصویربرداری، عملیات تجزیه طیفی را انجام می‌دهد. به عبارت دیگر، در این روش فرض بر این است که برخی مواد به صورت یقینی در تصویر فراطیفی حضور دارند. اگرچه نتایج مطلوبی از عملکرد این روش در [14] به‌منظور تجزیه طیفی مواد در مناطق معدنی گزارش شده است، در اختیار داشتن دانش قبلی و یقینی از هر منطقه‌ای چندان منطقی به نظر نمی‌رسد. در [15] یک روش تنگ و

مختلفی به‌منظور تجزیه طیفی ارائه شده‌اند. این دسته از الگوریتم‌ها با فرض وجود داشتن یا نداشتن پیکسل خالص در تصویر فراطیفی و بر مبنای طرح مسئله بهینه‌سازی روی حجم Simplex فراطیفی به تفکیک طیفی اقدام می‌کنند. الگوریتم N-FINDR [5] از مشهورترین الگوریتم‌هایی است که با فرض وجود پیکسل خالص تلاش می‌کند حجم‌ترین Simplex موجود در تصویر فراطیفی را بیابد؛ به‌گونه‌ای که رئوس آن، بردار امضای طیفی مواد تشکیل‌دهنده تصویرند. الگوریتم VCA [6] نیز با فرض وجود پیکسل خالص تلاش می‌کند گام‌به‌گام مواد تشکیل‌دهنده تصویر را یکی پس از دیگری و با تصویرسازی روی زیرفضاهای متعامد، شناسایی کند. این الگوریتم زیرفضای گسترش داده شده با امضای طیفی مواد شناسایی شده را می‌یابد. سپس امضای طیفی ماده بعدی را در راستای بردار متعامد به این زیر فضا جستجو می‌کند. الگوریتم IEA [7] نیز از الگوریتم‌هایی است که با فرض وجود پیکسل خالص و بر مبنای مجموعه‌ای از قیود خطی و شناسایی مواد براساس معیار کمینه کردن خطا، تفکیک طیفی را انجام می‌دهد. الگوریتم‌هایی که بر مبنای کمینه کردن حجم Simplex فراطیفی و بدون فرض وجود پیکسل خالص به تفکیک طیفی اقدام می‌کنند، معمولاً با یک مسئله بهینه‌سازی غیرمحدب مواجه می‌شوند و تلاش می‌کنند یا با در نظر گرفتن فرضیه‌های اضافه، مسئله را به یک مسئله محدب تبدیل کنند یا یک پاسخ شبه‌بهینه را برای مسئله در نظر بگیرند. الگوریتم‌های MVSA [8]، SISAL [9] و MVES [10] از این دسته الگوریتم‌ها محسوب می‌شوند. مشکل الگوریتم MVSA این است که ممکن است عضو تخمین زده شده آن، خارج از Simplex طیفی تصویر باشد که به تفکیک طیفی ناموفق منجر می‌شود [9]. ایده الگوریتم SISAL بسیار مشابه الگوریتم MVSA است؛ با این تفاوت که برای مسئله بهینه‌سازی غیرمحدب، یک پاسخ شبه‌بهینه (محلی) مناسب می‌یابد و بر اساس آن، تفکیک طیفی را انجام می‌دهد. الگوریتم MVES نیز تلاش می‌کند Simplex طیفی را با مسئله بهینه‌سازی گردشی تخمین بزند

۳، نتایج تجربی، بررسی و الگوریتم پیشنهادی با سایر الگوریتم‌ها مقایسه می‌شود و در نهایت، نتیجه‌گیری مقاله در بخش ۴ ارائه می‌شود.

۲- مدل مسئله و الگوریتم پیشنهادی

یک مکعب فراطیفی مشتمل بر M سطر و N ستون در L باند را در نظر بگیرید. طیف پیکسل واقع در سطر m و ستون n با نماد $X_{m,n} \in \mathbb{R}_+^L$ به ازای $m = 1, 2, \dots, M$ و $n = 1, 2, \dots, N$ نشان داده می‌شود. با فرض مدل خطی، مسئله اختلاط طیفی برای پیکسل $X_{m,n}$ به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود [17]:

$$X_{m,n} = \mathbf{B}\beta_{m,n} + V_{m,n} \quad (1)$$

که در آن، \mathbf{B} ماتریس امضای طیفی مواد موجود در تصویر است؛ به گونه‌ای که هر ستون آن بیان‌کننده بردار امضای طیفی یکی از K ماده حاضر در L باند طیفی به صورت $\mathbf{B} = [B_0, B_1, \dots, B_{K-1}]$ است. میزان فراوانی نسبی هر کدام از مواد موجود با المان‌های بردار $\beta_{m,n}$ با طول K مشخص می‌شود. همچنین $V_{m,n}$ بیان‌کننده نویز گوسی جمع‌شونده (AWGN) با واریانس σ^2 است. توجه کنید شرایط فیزیکی مسئله به دو قید در مدل ترکیب خطی منجر می‌شود: نخست، المان‌های بردار فراوانی نسبی نامنفی‌اند و دوم، مجموع آنها برابر یک است. در مسئله تجزیه طیفی، هدف، شناسایی امضای طیفی مواد تشکیل‌دهنده (تخمین ماتریس \mathbf{B}) و میزان فراوانی نسبی آنها در هر کدام از پیکسل‌ها (بردار $\beta_{m,n}$) است. فرض کنید ماتریس \mathbf{B} و بعد تشکیل‌دهنده آن (K) به گونه‌ای مشخص شده است که در اینجا موضوع بحث ما نیست. روش پیشنهادی که برای تخمین میزان فراوانی نسبی یعنی $\beta_{m,n}$ و در ادامه مطرح می‌شود، به سادگی و با داشتن دانش کلی از مواد موجود در منطقه، برای تعیین \mathbf{B} نیز استفاده خواهد شد. به این ترتیب و با مشخص‌بودن ماتریس \mathbf{B} ، اکنون هدف، یافتن بردار وزن W_k به ازای $k = 0, 1, \dots, K-1$ برای هر کدام از مواد موجود در ماتریس \mathbf{B} است؛

مقاوم نسبت به نویز به منظور تفکیک طیفی ارائه شده است که با مسئله بهینه‌سازی از نوع نرم $l_{2,1}$ ، مدل‌سازی و حل شده است. مبنای مدل‌سازی مسئله تُنک در این روش نرم l_2 است؛ ولی با توجه به اینکه نرم l_2 نسبت به نویز مقاوم نیست، مسئله تُنک با نرم $l_{2,1}$ مدل‌سازی شده است. به‌تازگی در [12] یک روش هموارسازی برای حل مسئله بهینه‌سازی نرم l_0 ارائه شده است. این روش بر مبنای تابع تجزیه چیشف است و تلاش می‌کند مسئله تجزیه طیفی را با یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه مدل‌سازی کند و به پاسخ یکتا برسد.

همچنین کتابخانه طیفی به‌خودی‌خود در بردارنده اطلاعات ارزشمندی است که تا کنون به صورت مستقیم در پایه‌ریزی الگوریتم‌ها بررسی نشده است. روش پیشنهادی در این مقاله بر استفاده مستقیم از این دانش قبلی استوار است. در روش پیشنهادی و با فرض مدل خطی برای پدیده اختلاط طیفی، یک ساختار خطی و تغییرناپذیر با زمان‌بر روی مجموعه‌ای از امضاها طیفی موجود در کتابخانه طیفی منطبق می‌شود. سپس به‌ازای هر امضای طیفی، بردار وزن مدل فوق به صورت منحصربه‌فرد به گونه‌ای تخمین زده می‌شود که امضای طیفی هر ماده و بردار وزن متناظر با آن، یک زوج به‌شدت نامتعامل را تشکیل دهد و بردار وزن امضای طیفی هر ماده بر امضای طیفی سایر مواد تقریباً عمود باشد. بردارهای وزن به صورت وفقی و با الگوریتم کمترین میانگین مربعات نرمالیزه‌شده (Normalized Least Mean Square: NLMS) تخمین زده می‌شوند که الگوریتمی مقاوم و بهینه با معیار نرم H^∞ است [16]. پیچیدگی بسیار اندک محاسباتی در استفاده از این الگوریتم، مقاوم‌بودن نسبت به تغییرات طیفی و توانایی تشخیص سریع تغییرات پارامتر، از مزایای کاربردی روش پیشنهادی به‌ویژه در نسبت‌های سیگنال به نویز (SNR) پایین در مقایسه با روش‌های موجود است.

بر اساس این، ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲، مدل خطی اختلاط طیفی و مسئله تجزیه طیفی، معرفی و سپس الگوریتم پیشنهادی ارائه می‌شود. در بخش

$$d_{k,i} = W_k^T Z_i + v_{k,i} \quad (6)$$

مشخص است اگر $W_{k,i-1}$ به سمت W_k میل کند، نویز جمعی $v_{k,i}$ به سمت صفر میل خواهد کرد. بر اساس این حقیقت و با توجه به رابطه (۶)، ممکن است چنین نتیجه گرفته شود که یک الگوریتم وفقی به سادگی با مشاهده $d_{k,i}$ و Z_i بردار وزن W_k را تخمین می‌زند. به عبارت دیگر، به کمک رابطه‌ای وفقی از نوع:

$$W_{k,i} = \mathcal{F}(W_{k,i-1}, d_{k,i}, Z_i) \quad (7)$$

(که در آن \mathcal{F} مبین یک عملگر وفقی است) و با افزایش i به تدریج $W_{k,i}$ به W_k همگرا می‌شوند؛ اما تعیین W_k در شرایط کنونی و با استفاده از هر نوع ساختار وفقی به نتایج مناسبی منجر نخواهد شد؛ زیرا همبستگی بین Z_{i+K} و Z_i شدید است. به عبارت دیگر، به ازای $i = 0, 1, 2, \dots$ $Z_i = Z_{i+K}$ است. برای برطرف کردن این مشکل، به ازای $i = 0, 1, 2, \dots$ بردار کاملاً تصادفی $U_{k,i}$ با ویژگی‌های در دسترس زیر تولید می‌شود:

$$W_{k,i-1}^T U_{k,i} = 0 \quad (8)$$

$$U_{k,i}^T U_{k,i+K} = -Z_i^T Z_i \quad (9)$$

$$Z_i^T U_{k,i+K} = 0 \quad (10)$$

$$U_{k,i}^T Z_i = 0. \quad (11)$$

اکنون تعریف می‌شود:

$$G_{k,i} = Z_i - U_{k,i} \quad (12)$$

از روابط (۶) و (۱۲) داریم:

$$d_{k,i} = W_k^T G_{k,i} + \xi_{k,i} \quad (13)$$

که در آن $\xi_{k,i} = W_k^T U_{k,i} + v_{k,i}$ اگر $W_{k,i-1}$ به W_k همگرا شود، $\xi_{k,i}$ نیز مشابه $v_{k,i}$ (به استناد رابطه (۸)) به صفر همگرا خواهد شد. با توجه به روابط (۹)، (۱۰) و (۱۱) به ازای همه زمان‌های i ، $G_{k,i}^T G_{k,i+K} = 0$ است (توجه کنید $Z_i = Z_{i+K}$)؛ بنابراین همبستگی چشمگیری بین المان‌های دنباله $\{G_{k,i}\}_i$ وجود ندارد. به این ترتیب، بردار وزن W_k در رابطه (۱۳) به کمک یک الگوریتم وفقی تخمین زده می‌شود. برای این منظور، از الگوریتم NLMS برای تخمین W_k استفاده می‌شود. الگوریتم NLMS با در

به گونه‌ای که شروط:

$$\begin{aligned} |W_k^T B_k| &= 1, & k &= 0, 1, \dots, K-1 \\ |W_k^T B_{k'}| &\leq \delta, & k, k' &= 0, 1, \dots, K-1 \\ & & k &\neq k' \end{aligned} \quad (2)$$

برآورده شوند. در رابطه (۲) δ یک عدد ثابت و مثبت با شرط $1 \ll \delta$ است. به عبارت دیگر، بردار W_k به گونه‌ای محاسبه می‌شود که زوج (W_k, B_k) به ازای $k = 0, 1, \dots, K-1$ یک زوج به شدت نامتعامل و زوج‌های $(W_k, B_{k'})$ به ازای $k, k' = 0, 1, \dots, K-1$ و $k \neq k'$ تقریباً متعامد باشند (توجه داشته باشید اگر چه در حالت کلی دستگاه معادله و نامعادلات (۲) دارای بیش از یک جواب است، این موضوع اهمیتی نداشته و پیداشدن یک W_k با ویژگی‌های مطرح شده در این رابطه، هدف اصلی است). این شرایط، پایه و اساس روش پیشنهادی را تشکیل می‌دهد. در روش پیشنهادی از یک الگوریتم وفقی مبتنی بر تشکیل یک مدل خطی و تغییرناپذیر با زمان و با در نظر گرفتن شرایط فیزیکی مسئله و بدون در نظر گرفتن هرگونه فرض آماری برای محاسبه W_k ها ($k = 0, 1, \dots, K-1$) استفاده می‌شود. برای این منظور، پارامتر $i = 0, 1, \dots$ زمان‌های تکرار الگوریتم در نظر گرفته شده است. اکنون تعریف می‌شود:

$$Z_i = \begin{cases} B_0 & \text{if } i \equiv 0 \pmod K \\ B_1 & \text{if } i \equiv 1 \pmod K \\ \vdots & \\ B_{K-1} & \text{if } i \equiv K-1 \pmod K \end{cases} \quad (3)$$

فرض کنید $W_{k,i-1}$ برآورد الگوریتم از W_k در لحظه زمانی $i-1$ است. حال $d_{k,i}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{k,i} = \text{sign}(W_{k,i-1}^T Z_i) \times \begin{cases} \delta & \text{if } i \equiv 0 \pmod K \\ \vdots & \\ \delta & \text{if } i \equiv k-1 \pmod K \\ 1 & \text{if } i \equiv k \pmod K \\ \delta & \text{if } i \equiv k+1 \pmod K \\ \vdots & \\ \delta & \text{if } i \equiv K-1 \pmod K \end{cases} \quad (4)$$

اگر

$$v_{k,i} = d_{k,i} - W_{k,i-1}^T Z_i \quad (5)$$

خواهیم داشت:

مختلف در زیرمجموعه‌های گوناگون از کتابخانه امضای طیفی به صورت برون خط، محاسبه و برای استفاده‌های آتی به صورت کتابخانه ذخیره می‌شود. این ویژگی از ویژگی‌های مهم روش پیشنهادی است.

الگوریتم (۱): شبه‌کد اجرای الگوریتم پیشنهادی برای محاسبه بردار وزن W_k ($k = 0, 2, \dots, K - 1$)

Establish spectral signatures set:
 $B = [B_0, B_1, \dots, B_{K-1}]$

Set the parameters: $0 < \mu < 1, \delta \ll 1$

$i = 0$
 $W_{k,0} = \mathbf{0}$

While! $(|W_{k,i}^T B_k| = 1) \& \{ |W_{k,i}^T B_j| \leq \delta \}_{j=0, j \neq k}^{K-1}$

$i \leftarrow i + 1$

$$Z_i = \begin{cases} B_0 & \text{if } i \equiv 0 \pmod K \\ B_1 & \text{if } i \equiv 1 \pmod K \\ \vdots & \\ B_{K-1} & \text{if } i \equiv K - 1 \pmod K \end{cases}$$

$d_{k,i} = \text{sign}(W_{k,i-1}^T Z_i)$

$$\times \begin{cases} \delta & \text{if } i \equiv 0 \pmod K \\ \vdots & \\ \delta & \text{if } i \equiv k - 1 \pmod K \\ 1 & \text{if } i \equiv k \pmod K \\ \delta & \text{if } i \equiv k + 1 \pmod K \\ \vdots & \\ \delta & \text{if } i \equiv K - 1 \pmod K \end{cases}$$

Generate $U_{k,i}$ in such a way that:

$$\begin{cases} W_{k,i-1}^T U_{k,i} = 0 \\ U_{k,i}^T U_{k,i+K} = -Z_i^T Z_i \\ Z_i^T U_{k,i+K} = 0 \\ U_{k,i}^T Z_i = 0 \end{cases}$$

$G_{k,i} = Z_i - U_{k,i}$

$$W_{k,i} = W_{k,i-1} + \frac{\mu}{\|G_{k,i}\|^2} G_{k,i} (d_{k,i} - W_{k,i-1}^T G_{k,i})$$

End While
 $W_k = W_{k,i}$

با مطرح شدن این روش، مشخص می‌شود الگوریتم NLMS که معمولاً در مسائل شناخته‌شده‌ای نظیر شناسایی سیستم، حذف نویز، حذف تداخل و غیره کاربرد دارد، با تمهیدات اولیه و مدل‌سازی مناسب در حل بسیاری از مسائل دیگر (که در نگاه اول، استفاده از آن به‌عنوان یک راه‌حل در اولویت قرار نمی‌گیرد) نیز کارایی خود را نشان دهد. تجربه‌های متنوعی از این نوع نگرش در [18-21] مشاهده می‌شود که در هر یک از آنها یک مسئله نسبتاً پیچیده با مدل‌سازی اولیه به مسئله‌ای حل‌شدنی با الگوریتم NLMS تبدیل می‌شود. علاوه بر این، در [22] از این

اختیار داشتن دنباله مطلوب $d_{k,i}$ و بردار $G_{k,i}$ بردار وزن W_k را در گام i ام ($i = 0, 1, 2, \dots$) با رابطه به‌هنگام‌سازی زیر تخمین می‌زند [16]:

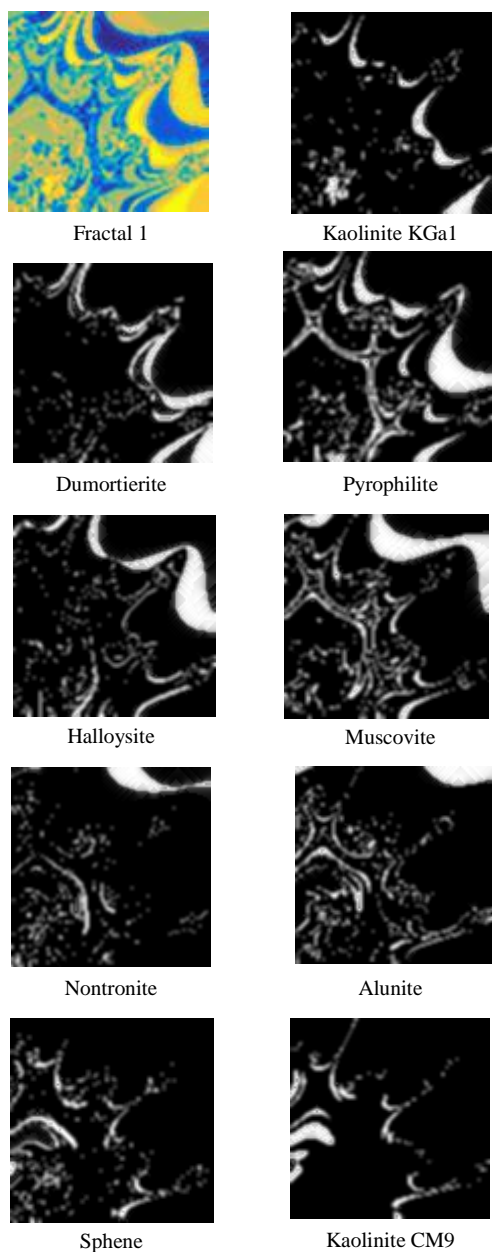
$$W_{k,i} = W_{k,i-1} + \frac{\mu}{\|G_{k,i}\|^2} G_{k,i} (d_{k,i} - W_{k,i-1}^T G_{k,i}) \quad (14)$$

که در آن $W_{k,0} = \mathbf{0}$ مقدار اولیه و $0 < \mu < 1$ اندازه گام الگوریتم است. در هر گام و با محاسبه $W_{k,i}$ باید برآورده شدن شروط رابطه (۲) بررسی شود. با فرض اینکه در گام $i = i_k$ این شروط برآورده شده باشند، در این گام، اجرای الگوریتم متوقف می‌شود و W_{k,i_k} به‌عنوان برآوردی بدون خطا از W_k پذیرفته خواهد شد ($W_k = W_{k,i}$). الگوریتم (۱) شبه‌کد اجرای روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

این روال برای تمام مواد موجود احتمالی در تصویر مشاهده‌شده (برای تمام امضاهای طیفی $\{B_k\}_{k=0}^{K-1}$ در ماتریس B) تکرار می‌شود تا تمام زوج‌های $\{(W_k, B_k)\}_{k=0}^{K-1}$ حاصل شوند. سپس با تشکیل ماتریس $W = [W_1, W_2, \dots, W_K]$ و محاسبه $W^T X_{m,n}$ به‌ازای $n = 1, 2, \dots, N$ و $m = 1, 2, \dots, M$ مواد موجود در تصویر فراطیفی، شناسایی و تجزیه طیفی انجام می‌شود. درواقع با توجه به روابط مطرح‌شده در (۲)، $W^T X_{m,n}$ تخمینی از $\beta_{m,n}$ خواهد بود.

روش پیشنهادی با معلوم فرض کردن ماتریس B توضیح داده شد؛ اما با استفاده چندمرحله‌ای از آن، به‌سادگی این ماتریس نیز تعیین خواهد شد. برای این منظور، با استفاده از اطلاعات منطقه‌ای در اختیار، تمامی مواد احتمالی موجود در ناحیه بررسی‌شده، مواد موجود قطعی در نظر گرفته می‌شوند و ساختار ماتریس B براساس مواد فرض‌شده موجود مشخص می‌شود. با تعیین $\beta_{m,n}$ برای این ماتریس، المان‌های بسیار کوچک آن نشان‌دهنده نبود ماده متناظر است. در اجرای مجدد الگوریتم، این مواد از فهرست مواد موجود، حذف و ماتریس B این‌بار با تعداد ستون کمتر در نظر گرفته می‌شود. معمولاً روند تعیین ماتریس B ، در یک مرحله از اجرای روش پیشنهادی تکمیل می‌شود.

در حالت کلی، بردار وزن مربوط به امضای طیفی مواد



شکل (۲): فراکتال شماره یک در مجموعه داده‌های سنتز شده و تصویر مرجع (Ground Truth) هر کدام از مواد تشکیل‌دهنده تصویر فراطیفی [23]

رویکرد در کشف ماده هدف در تصاویر فراطیفی استفاده شده است. مدل‌سازی خطی مناسب مسئله از عوامل اصلی در موفق بودن شیوه پیشنهادی در مسائل مطرح شده است؛ زیرا سعی شده است تمامی داده‌های فیزیکی آن، احصا و از الگوریتم NLMS (که قابلیت انطباق با تغییرات پیش‌بینی نشده مدل یا برآورد نادرست در خطای ناشی از خطی‌سازی مسئله را دارد) استفاده شود. ورود به حوزه‌های فراطیفی، تجربه‌ای تازه از به‌کارگیری این شیوه است.

نکته دیگر بااهمیت در روش پیشنهادی، نیازنداشتن به اجرای مجدد آن برای برآورد $\beta_{m,n}$ در محیط‌هایی است که دارای ماتریس B مشابه‌اند. به عبارت دیگر، اگر برای محیطی با یک ماتریس B مشخص (که این ماتریس با روش پیشنهادی یا هر روش دیگری تعیین شده است) W_k ها به کمک روش پیشنهادی تعیین شوند، برای تعیین $\beta_{m,n}$ در هر محیط دیگری با B یکسان با این محیط، به اجرای مجدد الگوریتم نیازی نیست و به کمک ماتریس $W = [W_1, W_2, \dots, W_K]$ (که اکنون مقدار آن به سبب اجرای الگوریتم برای محیط اول، تعیین شده است) این کار انجام می‌شود. به این ترتیب، با ذخیره‌سازی کتابخانه‌ای نتایج الگوریتم به تدریج نیاز به اجرای مجدد آن از بین می‌رود. این موضوع، میزان پیچیدگی الگوریتم را برای مقایسه آن با دیگر الگوریتم‌ها متنی می‌کند؛ اگرچه در شرایط اجرا نیز پیچیدگی از مرتبه خطی است.

نکته آخر، بردار W_k است. با توجه به یکتانبودن چنین برداری که برآورنده شرایط رابطه (۲) است، با نگرشی شهودی، همگرایی الگوریتم پیشنهادی، همواره برای رسیدن به یک پاسخ از بین مجموعه پاسخ‌ها در شرایط متعارف رخ می‌دهد.

۳- شبیه‌سازی

در بسیاری از مراجع، از این داده‌ها برای مقایسه عملکرد الگوریتم‌های تجزیه طیفی استفاده می‌شود. این مجموعه داده شامل تصاویر فراطیفی با ابعاد 100×100 پیکسل در $L = 221$ باند طیفی‌اند که از ۹ ماده معدنی مختلف ($K = 9$) تشکیل شده‌اند و بر مبنای قواعد فراکتال‌ها به صورت خطی با هم ترکیب شده‌اند. امضای

در این بخش و به منظور ارزیابی عملکرد الگوریتم پیشنهادی و مقایسه آن با الگوریتم‌های دیگر، از مجموعه داده‌های فراطیفی سنتز شده بر مبنای فراکتال‌ها استفاده می‌شود که با [23] تهیه و گسترش داده شده‌اند.

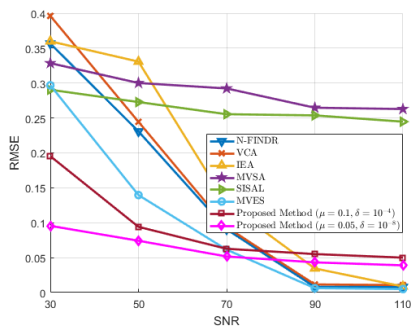
ارائه یک الگوریتم وفقی به منظور تجزیه طیفی مواد در تصاویر فراطیفی

معیار RMSE (Root Mean Square Error) است که بین تصویر فراطیفی اصلی ($Y_{m,n} = \mathbf{B}\beta_{m,n}$) و تصویر فراطیفی بازسازی شده ($\hat{Y}_{m,n} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\beta}_{m,n}$) به ازای $m = 1, 2, \dots, M$ و $n = 1, 2, \dots, N$ به صورت [24]:

$$\text{RMSE}(Y, \hat{Y}) = \frac{1}{M \times N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \|Y_{m,n} - \hat{Y}_{m,n}\| \right) \quad (15)$$

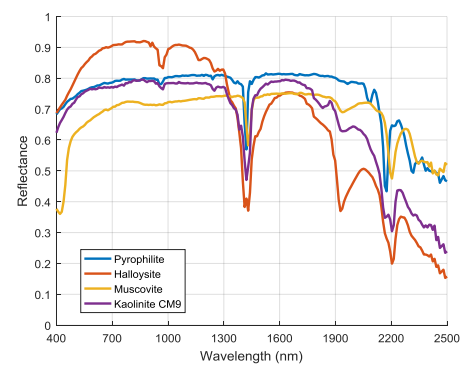
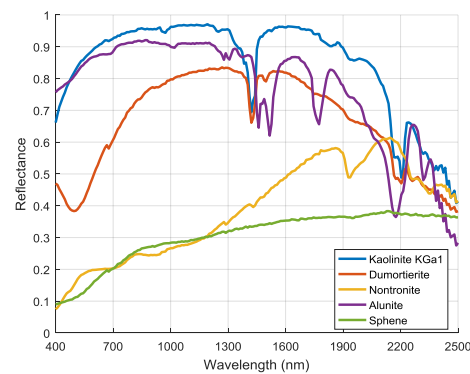
محاسبه می شود. جدول (۱) مقدار RMSE را برای روش پیشنهادی و چند روش دیگر به ازای SNRهای مختلف نشان می دهد. مقادیر عددی پارامترهای δ و μ در روش پیشنهادی به صورت $\delta = \{10^{-4}, 10^{-8}\}$ و $\mu = \{0.1, 0.05\}$ در نظر گرفته شده اند. برای هر پیکسل

مقدار SNR به صورت $\text{SNR} = \frac{\|\mathbf{B}\beta_{m,n}\|_2^2}{\|V_{m,n}\|_2^2}$ تعریف می شود [11]. شکل (۴) نیز رفتار تغییرات RMSE بر حسب SNR را نشان می دهد. الگوریتم پیشنهادی، بهترین نتیجه را در SNRهای پایین در مقایسه با سایر الگوریتم ها ارائه می دهد. در SNRهای بالاتر الگوریتم MVES از نتایج بهتری برخوردار است. نکته حائز اهمیت در ارتباط با الگوریتم پیشنهادی، پارامتر تنظیم شده δ است. نقش این پارامتر، تنظیم میزان تعامد بردار وزن امضای طیفی یک ماده بر امضای طیفی سایر مواد است. هرچه مقدار δ کوچک تر باشد، این تعامد قوی تر خواهد شد؛ ولی سرعت همگرایی الگوریتم NLMS در تخمین بردار وزن، کاهش می یابد؛ بنابراین، یک مبادله بین سرعت همگرایی و دقت روش پیشنهادی در تجزیه طیفی وجود دارد. حالت بهینه، تعامد کامل است که به ازای $\delta = 0$ رخ می دهد؛ ولی در این حالت، همگرایی الگوریتم NLMS بعید به نظر می رسد.



شکل (۴): منحنی تغییرات RMSE بر حسب SNR برای الگوریتم های مختلف

طیفی این مواد از کتابخانه طیفی USGS تهیه شده است. فراکتال شماره یک از این مجموعه داده و تصاویر مرجع (Ground Truth) هر کدام از مواد تشکیل دهنده در شکل (۲) نشان داده شده اند. شکل (۳) نیز امضای طیفی این مواد را نشان می دهد.



شکل (۳): امضای طیفی مواد تشکیل دهنده فراکتال شماره یک در مجموعه داده سنتز شده [23]

تصاویر فراطیفی مبتنی بر فراکتال ها دو ویژگی عمده دارند [23]:

- تمام پیکسل های سنتز شده در تصویر فراطیفی ترکیبی اند و هیچ پیکسل خالصی وجود ندارد.
- تعداد مواد تشکیل دهنده پیکسل های واقع در مرز نواحی، بیشتر از نواحی دیگر است.

ویژگی های فوق باعث شده است پژوهشگران حوزه پردازش تصاویر فراطیفی، به این مجموعه داده توجه شایانی داشته باشد. همچنین الگوریتم های VCA, N-FINDR, MVSA, IEA, SISAL, MVES که از الگوریتم های تجزیه طیفی مشهور با کارایی پذیرفته شده محسوب می شوند، برای مقایسه با روش پیشنهادی انتخاب شده اند.

معیار ارزیابی عملکرد الگوریتم های تجزیه طیفی معمولاً

جدول (۱): مقدار **RMSE** بین تصویر فراطیفی اصلی و تصویر فراطیفی بازسازی شده به ازای **SNR** های مختلف

(نتایج برای الگوریتم پیشنهادی به ازای مقادیر $\mu = 0.1$ و $\delta = 10^{-4}$ گزارش شده اند)

الگوریتم	SNR=30	SNR=50	SNR=70	SNR=90	SNR=110
N-FINDR	0.3566	0.2308	0.0906	0.0080	0.0080
VCA	0.3962	0.2445	0.0938	0.0116	0.0107
IEA	0.3598	0.3307	0.1271	0.0345	0.0087
MVSA	0.3285	0.3001	0.2923	0.2647	0.2628
SISAL	0.2904	0.2728	0.2554	0.2537	0.2447
MVES	0.2968	0.1396	0.0614	0.0063	0.0050
پیشنهادی الگوریتم	0.1926	0.0941	0.0694	0.0551	0.0499

Magazine, Vol. 31, pp. 24–33, January 2014.

- [5] Michael E Winter, "N-FINDR: An Algorithm for Fast Autonomous Spectral End-member Determination in Hyperspectral Data", In SPIE International Symposium on Optical Science, Engineering and Instrumentation, Pages 266–275, 1999.
- [6] J. M. P. Nascimento and J. M. B. Dias, "Vertex Component Analysis: A Fast Algorithm to Unmix Hyperspectral Data", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 43, No. 4, pp. 898-910, April 2005.
- [7] R. A. Neville, K Staenz, T Szeredi, J Lefebvre, and P Hauff, "Automatic Endmember Extraction from Hyperspectral Data for Mineral Exploration", Proceedings of Canadian Symposium Remote Sensing, Pages 21–24, 1999.
- [8] J. Li and J. M. Bioucas-Dias, "Minimum Volume Simplex Analysis: A Fast Algorithm to Unmix Hyperspectral Data", *IGARSS 2008 - 2008 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, Boston, MA, pp. 250- 253, 2008.
- [9] Jose M Bioucas-Dias, "A Variable Splitting Augmented Lagrangian Approach to Linear Spectral Unmixing", Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing, Pages 1–4, 2009.
- [10] T. Chan, C. Chi, Y. Huang, and W. Ma, "A Convex Analysis-Based Minimum-Volume Enclosing Simplex Algorithm for Hyperspectral Unmixing", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 57, No. 11, pp. 4418-4432, November 2009.
- [11] Z. Shi, W. Tang, Z. Duren, and Z. Jiang, "Subspace Matching Pursuit for Sparse Unmixing of Hyperspectral Data", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 52, No. 6, pp. 3256-3274, June 2014.
- [12] X. Xu, Z. Shi, and B. Pan, " ℓ_0 -Based Sparse Hyperspectral Unmixing Using Spectral Information and a Multi-Objectives Formulation", *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, Vol 141, Pages 46-58, July 2018.
- [13] C. Deng, S. Zhang, S. Wang, W. Tian, and Z. Wu, "Sparse Hyperspectral Unmixing Based on Smoothed ℓ_0 Regularization", *Infrared Physics & Technology*, Volume 67, Pages 306-314, November 2014.
- [14] W. Tang, Z. Shi, Y. Wu, and C. Zhang, "Sparse Unmixing of Hyperspectral Data Using Spectral A

۴- نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش نوین به منظور تجزیه طیفی مواد در تصاویر فراطیفی ارائه شد. بر خلاف بیشتر روش های موجود، در الگوریتم پیشنهادی به صورت مستقیم از امضای طیفی مواد که به صورت کتابخانه طیفی در اختیار است، به منظور پایه ریزی الگوریتم استفاده می شود. با فرض مدل خطی برای پدیده اختلاط طیفی، روش پیشنهادی، یک مدل خطی و تغییرناپذیر با زمان، بر مسئله منطبق می کند؛ به گونه ای که به صورت وفقی و با الگوریتم NLMS برای هر ماده موجود احتمالی در تصویر فراطیفی، یک بردار وزن منحصر به فرد تخمین می زند. بردار وزن هر ماده بر امضای طیفی سایر مواد تقریباً متعامد است. با ضرب بردارهای وزن در تصویر مشاهده شده، عملیات شناسایی مواد و تجزیه طیفی صورت می گیرد. بررسی تجربی روش پیشنهادی بر مجموعه داده های سنتز شده، نشان دهنده عملکرد مناسب آن، به ویژه در SNR های پایین است.

مراجع

- [1] M. Borengasser, W. S. Hungate, and R. Watkins, "Hyperspectral Remote Sensing: Principles and Applications", Remote Sensing Applications Series, Taylor & Francis, 2007.
- [2] J. G. Ferwerda, "Charting the Quality of Forage: Measuring and Mapping the Variation of Chemical Components in Foliage with Hyperspectral Remote Sensing", Ph.D. Thesis, Wageningen University, 2005.
- [3] D. Manolakis, D. Marden, and G. A. Shaw, "Hyperspectral Image Processing for Automatic Target Detection Applications", *Lincoln Laboratory Journal*, Vol. 14, pp. 79–116, January 2003.
- [4] D. Manolakis, E. Truslow, M. Pieper, T. Cooley, and M. Brueggeman, "Detection Algorithms in Hyperspectral Imaging Systems: An Overview of Practical Algorithms", *IEEE Signal Processing*

- [20] Z. Gharekhani, K. Shahtalebi, and S. M. Saberali, "User Emulation Detection in Cognitive Radio Networks: An Adaptive Approach", *Computational Intelligence in Electrical Engineering*, Vol.8, No.1, pp.37-50, 2017.
- [21] G. Bakhshi and K. Shahtalebi, "Role of the NLMS Algorithm in Direction of Arrival Estimation for Antenna Arrays", *IEEE Communications Letters*, Vol. 22, No. 4, pp. 760-763, April 2018.
- [22] G. Bakhshi, K. Shahtalebi, and M. Momeni, "A New Adaptive Algorithm for Target Detection in Hyperspectral Images", *Infrared Physics & Technology*, Vol. 99, pp. 222-230, June 2019.
- [23] J. Plaza, E. M. T. Hendrix, I. García, G. Martín, and A. Plaza, "On Endmember Identification in Hyperspectral Images without Pure Pixels: A Comparison of Algorithms", *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 42, No. 2-3, pp. 163-175, February 2012.
- [24] E. M. T. Hendrix, I. García, J. Plaza, G. Martín and A. Plaza, "A New Minimum-Volume Enclosing Algorithm for Endmember Identification and Abundance Estimation in Hyperspectral Data", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 50, No. 7, pp. 2744-2757, July 2012.
- Priori Information", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 53, No. 2, pp. 770-783, February 2015.
- [15] Y. Ma, C. Li, X. Mei, C. Liu, and J. Ma, "Robust Sparse Hyperspectral Unmixing with $\ell_{2,1}$ Norm", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 55, No. 3, pp. 1227-1239, March 2017.
- [16] B. Hassibi, A. H. Sayed, and T. Kailath, "H-infinity Optimality of the LMS Algorithm", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 44, No. 2, pp. 267-280, February 1996.
- [17] D. Manolakis, C. Siracusa, and G. Shaw, "Hyperspectral Subpixel Target Detection Using the Linear Mixing Model", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 39, No. 7, pp. 1392-1409, July 2001.
- [18] M. Raeis, K. Shahtalebi, and A. R. Forouzan, "Computationally Efficient Adaptive Algorithm for Resource Allocation in Orthogonal Frequency-Division Multiple-Access-Based Cognitive Radio Networks", *IET Communications*, Vol. 9, pp. 1442-1449, August 2015.
- [19] N. Garakyaragh, K. Shahtalebi and A. R. Forouzan, "A Cyclic Frequency Tracking Loop for Wideband Spectrum Sensing and FM Demodulation", *IEEE Communications Letters*, Vol. 20, No. 10, pp. 2015-2018, Oct. 2016.

¹ Vertex Component Analysis (VCA)

² Iterative Error Analysis (IEA)

³ Minimum Volume Simplex Analysis (MVSA)

⁴ Simplex Identification via Split Augmented Lagrangian (SISAL)

⁵ Minimum Volume Enclosing Simplex (MVES)