

Stability Analysis of Bat Algorithm

Mahsa Fozuni Shirjini¹, Amin Nikanjam², Mahdi Aliyari Shoorehdeli³

¹ Faculty of Computer Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

² Faculty of Computer Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

³ Faculty of Electrical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

Abstract:

Bat Algorithm is a type of swarm intelligence algorithm which is inspired by the behavior of little bats which are looking for direction in hunting opportunities. Swarm intelligence algorithms are inspired by the nature which are very efficient on crucial optimization problems. These algorithms are simple, flexible and can be implemented easily as well. Analyzing swarm intelligence algorithms makes their utilization reliable and guarantees finding answers by them. Earlier, stability analysis has been accomplished for some swarm intelligence algorithms including Particle Swarm Optimization and Gravitational Search but sufficient mathematical analysis for the bat algorithm has not been done. For this purpose, in the present paper, we considered Bat Algorithm stability analysis using Lyapunov method. In this study, at first, stability analysis of standard bat algorithm has been analyzed. Because of unsuccessful attempts to analyze the stability of standard algorithm, new updating relations has been introduced to increase the degree of freedom. The stability analysis has been presented for these relations. Experimental results illustrate the stability of the new updating relations.

Keywords: Bat Algorithm, Optimization, Lyapunov Stability Analysis, Convergence.

تحلیل پایداری الگوریتم خفاش

مهسا فزونی شیرجینی^۱، امین نیک انجام^۲، مهدی علیاری شوره‌دلی^۳

۱- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی کامپیوتر - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - تهران - ایران

m_fozuni@email.kntu.ac.ir

۲- استادیار، دانشکده مهندسی کامپیوتر - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - تهران - ایران

nikanjam@kntu.ac.ir

۳- استادیار، دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - تهران - ایران

aliyari@kntu.ac.ir

چکیده: الگوریتم خفاش، نوعی الگوریتم هوش جمعی است که از رفتار خفاش‌های کوچک هنگام جهت‌یابی برای شکار، الهام گرفته شده است. الگوریتم‌های هوش جمعی الهام گرفته از طبیعت‌اند که در مسائل بهینه‌سازی دشوار بسیار کارآمد عمل می‌کنند. همچنین، این الگوریتم‌ها ساده و انعطاف‌پذیرند و پیاده‌سازی آسانی دارند. تحلیل پایداری الگوریتم‌های هوش جمعی، استفاده از آنها را قابل اطمینان و رسیدن به پاسخ را تضمین می‌کند. پیش از این، تحلیل پایداری برای برخی از الگوریتم‌های هوش جمعی از جمله بهینه‌سازی ازدحام ذرات و جستجوی گرانشی انجام شده است؛ اما تحلیل ریاضی کافی برای الگوریتم خفاش انجام نشده است. به همین منظور در این مقاله، پایداری الگوریتم خفاش با استفاده از روش لیاپانوف تحلیل شده است. در این مطالعه، ابتدا پایداری الگوریتم خفاش استاندارد تحلیل شد. با توجه به موفق نبودن تلاش‌های انجام‌شده برای تحلیل پایداری الگوریتم استاندارد، روابط به‌روزرسانی جدیدی برای افزایش درجه آزادی الگوریتم خفاش ارائه شد. سپس تحلیل پایداری الگوریتم با روابط به‌روزرسانی جدید انجام شده است. نتایج تجربی نشان‌دهنده پایداری الگوریتم با روابط به‌روزرسانی جدید است.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم خفاش، بهینه‌سازی، تحلیل پایداری لیاپانوف، همگرایی

۱- مقدمه

تمرکز خودکار (تغییرات خودکار میزان انتشار بلندی صدا و پالس، قابلیت تمرکز خودکار را برای این الگوریتم فراهم می‌کند؛ به‌طوری‌که استخراج راه‌حل‌ها در قسمتی از فضای جستجو با نتایج امیدبخش بهتر می‌شود) اشاره می‌شود. در سال‌های اخیر، پژوهشگران به الگوریتم خفاش توجه بسیاری کرده‌اند. کاربردهای بسیار زیادی برای این الگوریتم وجود دارد، از جمله کاربردهای آن به بهینه‌سازی پیوسته، زمان‌بندی، تخمین پارامتر، دسته‌بندی و خوشه‌بندی، پردازش تصویر و منطق فازی اشاره می‌شود [۲-۱۰]. همچنین، انواع مختلفی از الگوریتم خفاش ارائه شده است [۱۱-۱۳].

بررسی پایداری و همگرایی الگوریتم‌های هوش جمعی حائز اهمیت است؛ زیرا تعداد الگوریتم‌های هوش جمعی

الگوریتم خفاش، نوعی الگوریتم هوش جمعی است که یانگ در سال ۲۰۱۰ ارائه کرد [۱]. این الگوریتم از رفتار خفاش‌های کوچک برای جستجوی شکار، الهام گرفته است. از جمله مزایای الگوریتم خفاش به توانایی تنظیم فرکانس و

* تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۱۲/۱۰

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۳/۰۸

نام نویسنده مسئول: امین نیک انجام

نشانی نویسنده مسئول: ایران - تهران - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده مهندسی کامپیوتر

برای توسعه این الگوریتم از سه فرض اصلی زیر استفاده شده است [۱۶-۱۸]:

۱. همه خفاش‌ها از انعکاس صدا برای تشخیص فاصله استفاده می‌کنند و تفاوت بین موانع پیش رو و مواد غذایی را می‌دانند.

۲. پرواز خفاش‌ها به صورت تصادفی با سرعت v_i در مکان x_i است. همچنین، آنها به‌طور خودکار فرکانس یا طول موج پالس‌های انتشار خود و پالس خروجی را با توجه به میزان نزدیکی هدفشان تنظیم می‌کنند.

۳. هرچند بلندی صدا به روش‌های مختلفی تغییر می‌کند، فرض گرفته می‌شود بلندی صدا از یک A_0 بزرگ به یک مقدار حداقل A_{min} تغییر می‌کند.

در این الگوریتم هر خفاش با معیارهای سرعت v_i^t و مکان x_i^t در تکرار t ام سنجیده می‌شود. در میان تمام راه‌حل‌ها در کل جمعیت، بهترین راه‌حل x_* وجود دارد؛ بنابراین، با استفاده از روابط ۱ تا ۳، فرکانس، سرعت و مکان در هر تکرار به‌روزرسانی می‌شوند:

$$f_i = f_{min} + (f_{max} - f_{min}) * \beta \quad (1)$$

$$v_i^{t+1} = v_i^t + (x_i^t - x_*) * f \quad (2)$$

$$x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{t+1} \quad (3)$$

که در آن $\beta \in [0,1]$ یک بردار تصادفی با توزیع یکنواخت است. همچنین، فرکانس هر خفاش بین f_{min} و f_{max} خواهد بود که مقدار این دو متغیر به ابعاد مسئله بستگی دارد و معمولاً $f_{min} = 0$ و $f_{max} = 100$ در نظر گرفته می‌شود [۱].

در هر تکرار با استفاده از جستجوی محلی، یکی از بهترین جواب‌ها انتخاب شده است و موقعیت جدید هر یک از خفاش‌ها به‌طور محلی با گام تصادفی با استفاده از رابطه زیر به روز می‌شوند:

$$x_{new} = x_{old} + \varepsilon A^t \quad (4)$$

که در آن $\varepsilon \in [-1,1]$ یک عدد تصادفی بوده و $A^t = \langle A_i^t \rangle$ میانگین بلندی صدای خفاش‌ها در تکرار t است.

همچنین، بلندی صدای A_i و میزان پالس ارسالی r_i در هر تکرار به‌صورت زیر به روز می‌شود:

ارائه‌شده بسیار زیاد است و هیچ تضمینی برای پایداری این الگوریتم‌ها و رسیدن به پاسخ مناسب با آنها وجود ندارد. پیش از این، تحلیل پایداری برای برخی از الگوریتم‌های هوش جمعی از جمله بهینه‌سازی ازدحام ذرات، جستجوی گرانشی انجام شده است [۱۴، ۱۵]. نخستین مقاله به‌منظور بررسی الگوریتم خفاش مربوط به سال ۲۰۱۷ است که در آن یافتن بهترین تنظیم پارامتر برای دستیابی به نتایج بررسی شده است [۶]. همچنین چن و همکاران [۲۳] با استفاده از مدل زنجیره مارکوف و مدل ماتریس پویا تجزیه و تحلیل نظری برای خفاش استاندارد انجام دادند. آنها مدل ساده‌ای از الگوریتم خفاش استاندارد را بدون تغییرات بلندی صدا و میزان پالس در نظر گرفتند. همچنین در سال‌های اخیر در مقالاتی، تنظیم پارامتر الگوریتم خفاش و بهبود این الگوریتم بررسی شده است [۲۴-۲۵].

در این مقاله، پایداری الگوریتم خفاش تحلیل می‌شود. ادامه مقاله به این صورت است: در بخش ۲، الگوریتم خفاش استاندارد توضیح داده شده و در بخش ۳، روابط به‌روزرسانی جدید ارائه شده است. در ادامه، این روابط به‌روزرسانی با استفاده از فضای حالت، نمایش داده می‌شود. سپس با استفاده از روش لیپانوف، پایداری روابط به‌روزرسانی پیشنهادی تحلیل می‌شود. گفتنی است به‌دلیل استفاده از روش لیپانوف، شرایط به دست آمده محافظه‌کارانه‌اند و رعایت نکردن این شرایط، لزوماً به معنی ناپایداری نخواهد بود. بخش ۴، فضای پایدار را توصیف کرده است. در بخش ۵ نتایج تجربی آمده و در بخش آخر، نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲- الگوریتم خفاش استاندارد

الگوریتم خفاش یکی از الگوریتم‌های فراابتکاری الهام‌گرفته از طبیعت است که در سال ۲۰۱۰ یانگ آن را معرفی کرد [۱]. این الگوریتم براساس اصول زندگی خفاش‌ها طراحی شده است و نخستین الگوریتم از انواع الگوریتم‌هایی است که از تنظیم فرکانس استفاده می‌کنند. خفاش‌های کوچک در تاریکی مطلق با انتشار صدا و دریافت آن، طعمه را شکار و از برخورد با موانع، اجتناب می‌کنند. الگوریتم خفاش از ویژگی‌های ردیابی این خفاش‌های کوچک در جستجوی شکار الهام گرفته شده است [۱].

۳- روابط به‌روزرسانی جدید و تحلیل پایداری آن

در تلاش‌های انجام‌شده با استفاده از روش لیپانوف درباره پایداری یا ناپایداری الگوریتم خفاش استاندارد نمی‌توان اظهارنظر کرد؛ زیرا همواره علامت مقادیر ویژه به دست آمده متفاوت بود و امکان اظهارنظر درباره پایداری یا ناپایداری این الگوریتم وجود نداشت؛ بنابراین، با استفاده از افزایش درجه آزادی الگوریتم و افزودن پارامتر جدید به آن، در جهت همگراشدن الگوریتم خفاش تلاش شد. بدین‌منظور، پارامتر w با هدف پایدارشدن الگوریتم، به روابط به‌روزرسانی الگوریتم خفاش اضافه شد. روابط به‌روزرسانی پیشنهادی به صورت روابط (۷) و (۸) خواهد بود:

$$v_{t+1} = w * v_t + (x_t - x_*) * f \quad (۷)$$

$$x_{t+1} = w * x_t + v_{t+1} + (1 - w) * x_* \quad (۸)$$

در این روابط، پارامترهای w و f به صورت آزادانه مقدار می‌گیرند و برای مقداردهی آنها نیاز به پیروی از رابطه خاصی نیست؛ اما ممکن است شرایط پایداری، محدودیتی روی مقادیر پارامترهای w و f اعمال کند.

با استفاده از تعریف $\varepsilon_t = \begin{pmatrix} x_t - x_* \\ v_t \end{pmatrix}$ ، نمایش فضای حالت روابط به‌روزرسانی جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \varepsilon_{t+1} = A \varepsilon_t + B u_t \\ y_t = C \varepsilon_t \\ u_t = f y_t \end{cases} \quad (۹)$$

که در آن $A = \begin{bmatrix} w & w \\ 0 & w \end{bmatrix}$ ماتریس حالت، $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ماتریس ورودی و $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس خروجی است.

بنابراین،

$$\varepsilon_{t+1} = (A + fBC) * \varepsilon_t \quad (۱۰)$$

قضیه لیپانوف - سیستم در نزدیکی نقطه تعادل در مبدأ پایدار مجانبی است، اگر تابع اسکالری همانند $V(x)$ وجود داشته باشد که شرایط زیر را برآورده کند [۲۲]:

۱. $V(x)$ در محدوده‌ای حول مبدأ S پیوسته است و مشتق‌های جزئی آن نیز پیوسته‌اند.

$$۲. V(x) > 0 \text{ برای } x \neq 0$$

$$۳. V(0) = 0$$

$$A_i^{t+1} = \alpha A_i^t \quad (۵)$$

$$r_i^{t+1} = r_i^0 [1 - \exp(-\gamma t)] \quad (۶)$$

که در آن α و γ مقادیر ثابت‌اند و برای هر $0 < \alpha < 1$ و $\gamma > 0$ هنگامی که $t \rightarrow \infty$ داریم:

$$\begin{aligned} A_i^{t+1} &\rightarrow 0 \\ r_i^{t+1} &\rightarrow r_i^0 \end{aligned}$$

در الگوریتم خفاش تنظیم فرکانس، سرعت و دامنه حرکت ذرات را مشخص می‌کند. سرعت و دامنه حرکت ذرات با توجه به تغییرات بلندی صدا و پالس انتشار، متفاوت است. تغییرات میزان انتشار بلندی صدا و پالس، قابلیت تمرکز خودکار برای این الگوریتم را فراهم می‌کند؛ به‌طوری‌که استخراج راه‌حل‌ها در قسمتی از فضای جستجو بهتر می‌شود که نتایج امیدبخش‌اند. می‌دانیم فرکانس بالاتر یعنی طول موج کوتاه‌تر و فاصله کمتری را طی می‌کند؛ بنابراین، خفاش‌ها وقتی به طعمه نزدیک‌ترند، صدای آنها فرکانس بیشتری خواهد داشت. تنظیم فرکانس در این الگوریتم موجب موازنه بین اکتشاف و استخراج می‌شود. شبه کد الگوریتم خفاش در شکل (۱) نشان داده شده است.

```

1 Objective function  $f(X)$ .  $X = (x_1, \dots, x_d)^T$ 
2 Initialize the bat population  $X_i$  and  $V_i$ 
3 Define pulse frequency  $f_i$  at  $X_i$ 
4 Initialize pulse rate  $r_i$  and the loudness  $A_i$ 
5 While ( $t < \max$  number of iterations)
6     Generate new solutions by adjusting frequency,
      And updating velocities and locations/solutions
      [equation (1) to (3)]
7     If ( $\text{rand} > r_i$ )
8         Select a solution among the best
          solutions
9         Generate a local solution around the
          selected best solution
10    End if
11    Generate a new solution by flying randomly
12    If ( $\text{rand} < A_i$  &  $f(X_i) < f(X_*)$ )
13        Accept the new solutions
14        Increase  $r_i$  and reduce  $A_i$ 
15    End if
16    Rank the bats and find the current best  $X_*$ 
17 End While
18 Postprocess result and visualization

```

شکل (۱): شبه کد الگوریتم خفاش استاندارد [۱]

$$\begin{aligned} & [(A + fBC)^T (A + fBC) - I] \\ & = \begin{bmatrix} (f+w)^2 + f^2 - 1 & w(f+w) + fw \\ w(f+w) + fw & 2w^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (15) \end{aligned}$$

محاسبه مقادیر ویژه:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} (f+w)^2 + f^2 - 1 - \lambda & w(f+w) + fw \\ w(f+w) + fw & 2w^2 - 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ & = 0 \quad (16) \\ & ((f+w)^2 + f^2 - 1 - \lambda)(2w^2 - 1 - \lambda) \\ & = (w(f+w) + fw)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda^2 - ((f+w)^2 + f^2 + 2w^2 - 2)\lambda + \\ & (2w^2(f+w)^2 + 2f^2w^2 - 2w^2 \\ & - (f+w)^2 - f^2 + 1) \\ & - (w^2(f+w)^2 + f^2w^2 + 2f^2w^2 + 2fw^3) = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

$$\lambda^2 - ((f+w)^2 + f^2 + 2w^2 - 2)\lambda + (w^4 - 2w^2 - (f+w)^2 - f^2 + 1) = 0 \quad (18)$$

$$a = 1 \quad (19)$$

$$b = -((f+w)^2 + f^2 + 2w^2 - 2) \quad (20)$$

$$c = w^4 - 2w^2 - (f+w)^2 - f^2 + 1 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = \\ & (4)f^4 + 8wf^3 + (16w^2)f^2 + 12w^3f + 5w^4 \quad (22) \end{aligned}$$

شرایط مدنظر برای مقادیر ویژه منفی به صورت زیر است که در اینجا به طور مختصر و در ادامه به تفصیل بیان می شود. هر کدام از شرایط زیر برقرار باشد، موجب همگرایی و پایداری الگوریتم می شود.

۱. هنگامی که $\Delta < 0$ باشد، آن گاه مقادیر ویژه مختلط اند؛ بنابراین، باید قسمت حقیقی این مقادیر ویژه مزدوج مختلط منفی باشند؛ بنابراین باید $\frac{-b}{2a} < 0$ باشد؛
۲. هنگامی که $\Delta > 0$ باشد، آن گاه مقادیر ویژه حقیقی اند؛ بنابراین، باید مقادیر ویژه حقیقی منفی باشند. پس باید $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} < 0$ باشد.

حال هریک از این شرایط به طور مفصل بررسی می شوند. برای شرط اول داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)f^4 + 8wf^3 + (16w^2)f^2 + 12w^3f + 5w^4 < 0 \quad (23)$$

بنابراین، نیاز است چندجمله ای درجه ۴ بالا برحسب f حل شود و سپس تعیین علامت شود. این چندجمله ای درجه ۴ با روش های کاردانو و فراری [۱۹-۲۱] حل می شود

$$x \neq 0 \text{ برای } V'(x) < 0 \text{. ۴}$$

شرایط ۱ تا ۳، معین مثبت بودن $V(x)$ را تضمین می کنند و شرط ۴ به معنی معین منفی بودن $V'(x)$ است.

نکته ۱. سیستم یک نقطه تعادل منحصر به فرد در $x^* = p$ و $v^* = 0$ دارد؛ جایی که p متغیر با زمان است که می تواند بهترین موقعیت ذرات باشد. اگر p ثابت و تغییرناپذیر با زمان باشد، این موضوع برای دینامیک باقی ذرات (ذراتی به جز بهترین ذره) معتبر نیست. از این رو، نقطه تعادل فقط برای بهترین ذره وجود دارد که بهترین راه حل محلی الگوریتم خفاش در تکرار فعلی است و می تواند بهترین راه حل پس از تمام تکرارها باشد. اگر دینامیک بهترین ذرات به طور صحیح پایدار باشند، تضمین می شود ذره به نقطه تعادل نزدیک تر می شود (درواقع به بهترین ذره نزدیک تر می شود). ممکن است شرایط برای وجود یک نقطه تعادل برای هر ذره در تمام زمان ها در الگوریتم خفاش درست نباشد. تجزیه و تحلیل بقیه ذرات (غیر از بهترین ذره) چالش برانگیز است و در این مقاله بررسی نشده است [۱۵].

تابع اسکالر لیپانوف $V(x)$ به صورت زیر تعریف می شود که تمامی شرایط قضیه لیپانوف به جز شرط ۴ را برآورده می کند. برای برآورده کردن شرط ۴ نیاز است شرایط خاصی برقرار باشد و بررسی شود تحت چه شرایطی این تابع لیپانوف در تمامی شرایط قضیه صدق می کند.

$$v(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon \quad (11)$$

برای بررسی شرط چهارم قضیه لیپانوف باید شرایطی به دست آید که موجب منفی شدن v' یا همان Δv می شود؛ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \Delta v_{t+1} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{t+1}^T \varepsilon_{t+1} - \frac{1}{2} \varepsilon_t^T \varepsilon_t = \\ & \frac{1}{2} \varepsilon_t^T (A + fBC)^T (A + fBC) \varepsilon_t - \frac{1}{2} \varepsilon_t^T \varepsilon_t \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta v_{t+1} &= \\ & \frac{1}{2} \varepsilon_t^T [(A + fBC)^T (A + fBC) - I] \varepsilon_t \leq 0 \quad (13) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ باید منفی معین باشد $[(A + fBC)^T (A + fBC) - I]$

$$\begin{aligned} & [(A + fBC)^T (A + fBC) - I] \\ & = \begin{bmatrix} f+w & f \\ w & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f+w & w \\ f & w \end{bmatrix} - I \quad (14) \end{aligned}$$

و پس از حل چندجمله‌ای، با توجه به علامت ضریب بزرگترین توان و بازه‌های بین ریشه‌ها می‌توان آن را تعیین علامت کرد. حل این چندجمله‌ای درجه ۴ با کمک روش فراری در ادامه آمده است:

$$g(f) = (4)f^4 + 8wf^3 + (16w^2)f^2 + 12w^3f + 5w^4 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 8w \\ c &= 16w^2 \\ d &= 12w^3 \\ e &= 5w^4 \\ x &= f \end{aligned} \rightarrow \quad (25)$$

$$g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

چهار ریشه این معادله به صورت x_1, x_2, x_3, x_4 در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین، با استفاده از روش فراری و فرمول‌های مربوط به این روش، ریشه‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{4a} - S \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}} \quad (26)$$

$$x_{3,4} = \frac{-b}{4a} + S \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}} \quad (27)$$

به‌طوری‌که:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-2}{3}p + \frac{1}{3a}(Q + \frac{\Delta_0}{Q})} \quad (28)$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \quad (29)$$

$$p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2} \quad (30)$$

$$q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^3} \quad (31)$$

$$\Delta_0 = c^2 - 3bd + 12ae \quad (32)$$

$$\Delta_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2e + 27ad^2 - 72ace \quad (33)$$

بنابراین، ریشه‌های چندجمله‌ای درجه ۴ برحسب w به دست آمدند؛ بنابراین، اگر فرض کنیم $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ آن‌گاه تعیین علامت تابع g به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, x_1) &\rightarrow g(x) > 0 \\ x \in (x_1, x_2) &\rightarrow g(x) < 0 \\ x \in (x_2, x_3) &\rightarrow g(x) > 0 \\ x \in (x_3, x_4) &\rightarrow g(x) < 0 \\ x \in (x_4, \infty) &\rightarrow g(x) > 0 \end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود برای محاسبه ریشه‌ها در عبارات مربوط به آنها متغیرهای S و Q در مخرج آمده‌اند و

واضح است اگر هریک از این دو متغیر، مقدار صفر را به خود اختصاص دهند، ریشه تعریف نشده می‌شود و دچار مشکل می‌شویم؛ اما روش فراری برای این حالت‌های خاص نیز راه حل ارائه داده است و می‌توان با استفاده از فرمول‌های این روش، در این شرایط خاص، ریشه‌ها محاسبه می‌شوند [۲۰]. بنابراین، چند رابطه برای محاسبه ریشه‌ها وجود دارد؛ اما با توجه به اینکه نمی‌توان همیشه از یک رابطه برای محاسبه ریشه‌ها استفاده کرد و ریشه‌ها نیز عبارت‌هایی برحسب متغیر w هستند و با توجه به مقدار w ، ترتیب بزرگی و کوچکی ریشه‌ها و در نتیجه آن، بازه‌های مثبت و منفی شدن چندجمله‌ای درجه ۴ تغییر می‌کند؛ بنابراین، نمی‌توان رابطه و بازه صریحی به دست آورد. به همین علت تصمیم گرفته شد بازه همگرایی و شرایط پایداری را با استفاده از پیاده‌سازی و به صورت عددی و با رسم نمودار به دست آوریم؛ بنابراین در ادامه فقط شرایط غیرصریح کافی برای همگرایی، توضیح داده و روابط آن ارائه می‌شود. گفتنی است روش لیاپانوف فقط شرایط کافی را مشخص می‌کند و درباره شرایط کافی اطلاعاتی به ما نمی‌دهد.

بنابراین، برای برقراری شرط اول همگرایی باید شرایط زیر برقرار باشد:

۱- منفی بودن دلتای معادله مشخصه

$$\Delta < 0 \quad (34)$$

$$(4)f^4 + 8wf^3 + (16w^2)f^2 + 12w^3f + 5w^4 < 0 \quad (35)$$

۲- منفی بودن قسمت حقیقی ریشه‌های مزدوج مختلط معادله

$$\frac{-b}{2a} < 0 \quad (36)$$

$$(f+w)^2 + f^2 + 2w^2 - 2 < 0 \quad (37)$$

$$2f^2 + 2wf + (3w^2 - 2) < 0 \quad (38)$$

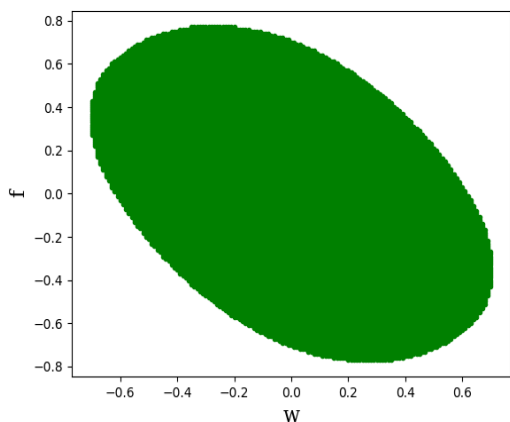
برای اینکه ناحیه ای با علامت منفی وجود داشته باشد، حتماً باید $\Delta > 0$ باشد؛ در نتیجه:

$$\Delta = 4w^2 - 8(3w^2 - 2) > 0 \quad (39)$$

بنابراین، باید:

$$|w| < \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (40)$$

و محدوده پایداری یا همگرایی الگوریتم به صورت شکل (۲) خواهد بود.



شکل (۲): محدوده پایداری الگوریتم جدید مبتنی بر الگوریتم خفاش

نکته ۲. گفتنی است در صورتی که $w = 1$ باشد، روابط به روزرسانی پیشنهادی به روابط به روزرسانی خفاش استاندارد تبدیل خواهد شد. با توجه به اینکه زمانی که مقدار این پارامتر ۱ باشد، خارج از محدوده پایداری قرار داریم؛ بنابراین، شرایط به دست آمده برای الگوریتم خفاش استاندارد صدق نمی‌کند و برای خفاش استاندارد، بازه پایداری به دست نیامده است. توجه به این نکته ضروری است که رعایت نکردن شرایط لیپانوف، لزوماً به معنی ناپایداری الگوریتم نیست؛ بنابراین همچنان درباره پایداری یا ناپایداری الگوریتم خفاش استاندارد نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۵- نتایج تجربی

آزمایش‌ها با استفاده از تابع Rosenbrock با ابعاد ۱۶ انجام شده است. برای این آزمایش‌ها اندازه جمعیت ۱۰۰ و تعداد تکرار ۲۵۰ در نظر گرفته شده و هر نمودار نشان‌دهنده میانگین ۵۰ اجرا است. همان‌طور که در شکل (۳) مشاهده می‌شود، هنگامی که پارامترها در بازه همگرایی قرار دارند، روند کلی نمودار لیپانوف به صورت نزولی خواهد بود و مقادیر ویژه همواره منفی اند. در واقع تمام ذرات در جهت نزدیک شدن به بهترین راه‌حل موجود در جمعیت (gbest) تلاش می‌کنند؛ بنابراین، تا زمانی که بهترین راه‌حل موجود در جمعیت ثابت است و تغییری نمی‌کند، همه ذرات به آن نزدیک می‌شوند و بنابراین نمودار لیپانوف نزولی خواهد

$$\begin{aligned} & \frac{-2w + \sqrt{4w^2 - 8(3w^2 - 2)}}{4} < f \\ & < \frac{-2w - \sqrt{4w^2 - 8(3w^2 - 2)}}{4} \end{aligned} \quad (۴۱)$$

و همچنین برای برقراری شرط دوم همگرایی باید شرایط زیر برقرار باشد:

۱- مثبت بودن دلتای معادله مشخصه

$$\Delta > 0 \quad (۴۲)$$

$$4f^4 + 8wf^3 + (16w^2)f^2 + 12w^3f + 5w^4 > 0 \quad (۴۳)$$

۲- منفی بودن ریشه‌ها یا همان مقادیر ویژه حقیقی

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} < 0 \quad (۴۴)$$

$$\begin{aligned} & \frac{((f+w)^2 + f^2 + 2w^2 - 2)}{2} \\ & \pm \frac{\sqrt{(4f^4 + 8wf^3 + (16w^2)f^2 + 12w^3f + 5w^4)}}{2} < 0 \end{aligned} \quad (۴۵)$$

۴- توصیف و رسم فضای پایدار

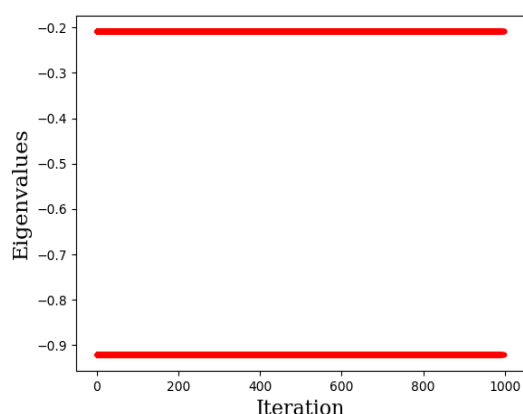
شرایط پایداری به صورت خلاصه این چنین توصیف می‌شود:

$$\begin{cases} (4w^4 + 4w^2 + 4)f^4 + 4wf^3 + (4w^4 + 12w^2 + 4)f^2 + 12w^3f + 5w^4 - 8 < 0 \\ \text{و} \\ |w| < \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \text{و} \\ \frac{-2w + \sqrt{4w^2 - 8(3w^2 - 2)}}{4} < f < \frac{-2w - \sqrt{4w^2 - 8(3w^2 - 2)}}{4} \end{cases} \quad (۴۶)$$

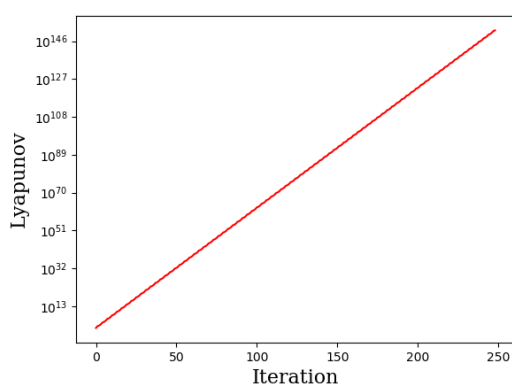
یا

$$\begin{cases} (4w^4 + 4w^2 + 4)f^4 + 4wf^3 + (4w^4 + 12w^2 + 4)f^2 + 12w^3f + 5w^4 - 8 > 0 \\ \text{و} \\ \frac{((f+w)^2 + f^2 + 2w^2 - 2)}{2} + \frac{\sqrt{(4f^4 + 8wf^3 + (16w^2)f^2 + 12w^3f + 5w^4)}}{2} < 0 \\ \text{و} \\ \frac{((f+w)^2 + f^2 + 2w^2 - 2)}{2} - \frac{\sqrt{(4f^4 + 8wf^3 + (16w^2)f^2 + 12w^3f + 5w^4)}}{2} < 0 \end{cases} \quad (۴۷)$$

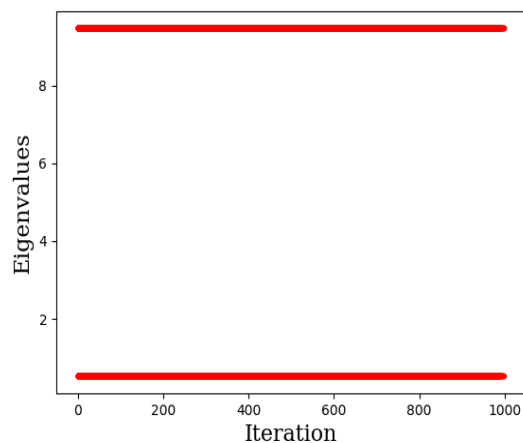
اگر شرایط بالا را به صورت عددی و با استفاده از پیاده‌سازی و رسم نمودار برحسب f و w رسم کنیم،



شکل (۴): نمودار مقادیر ویژه بر حسب تکرار در بازه همگرایی



شکل (۵): نمودار لیاپانوف بر حسب تکرار خارج از بازه همگرایی



شکل (۶): نمودار مقادیر ویژه بر حسب تکرار خارج از بازه همگرایی

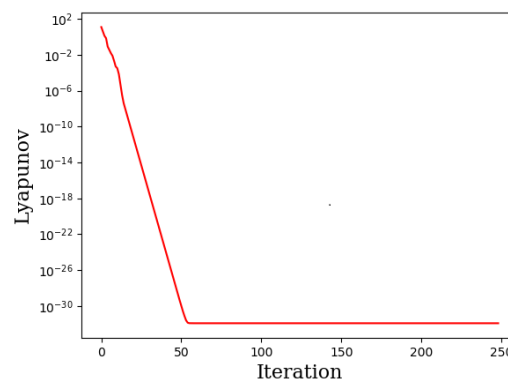
۶- نتیجه گیری

در این مقاله، پایداری الگوریتم خفاش اصلاح شده تحلیل شده است. با هدف پایدار کردن الگوریتم خفاش، درجه آزادی الگوریتم افزایش یافته است و با افزودن یک

بود؛ اما زمانی که بهترین راه حل تغییر زیادی می کند، ممکن است نمودار کمی صعود پیدا کند و در واقع در این زمان، همگرایی و پایداری از ابتدا شروع می شود و پس از آن، مجدد روند نمودار نزولی خواهد شد؛ بنابراین، الگوریتم در زمان های مختلف به صورت محلی همگرا خواهد بود و همواره مقادیر ویژه منفی باقی می ماند. نمودار مربوط به شکل (۳) به صورت لگاریتمی نمایش داده شده است تا روند کاهش تابع لیاپانوف در طی تکرارها مشهود باشد. همچنین، همان طور که در شکل (۴) مشاهده می شود، مقادیر ویژه در بازه همگرایی همواره منفی اند که این امر نشان دهنده پایداری الگوریتم در بازه همگرایی است.

همان طور که در شکل (۵) مشاهده می شود، هنگامی که پارامترها در بازه همگرایی قرار ندارند، الگوریتم می تواند رفتار از خود نشان دهد و همگرایی تضمین نمی شود؛ بنابراین، روند کلی نمودار لیاپانوف مربوط به آن نزولی نخواهد بود. نمودار مربوط به شکل (۵) به صورت لگاریتمی نمایش داده شده است تا روند افزایش تابع لیاپانوف در طی تکرارها مشهود باشد. با توجه به شکل (۶)، مقادیر ویژه در خارج از بازه همگرایی لزوماً منفی نیستند و بنابراین الگوریتم می تواند همگرا نشود و تضمینی برای پایداری الگوریتم در خارج از بازه همگرایی وجود ندارد.

با توجه به بازه پایداری به دست آمده در شکل (۲)، اگر مقادیر پارامتر w مربوط به این بازه را در ماتریس حالت مربوط به معادله ۹ (ماتریس A) جایگذاری کنیم، مقادیر ویژه آن یا همان قطب های سیستم در بازه $[-0.7, 0.7]$ قرار می گیرند. با توجه به اینکه مقادیر ویژه در داخل دایره واحد قرار دارند، می توان پایداری سیستم را نتیجه گرفت.



شکل (۳): نمودار لیاپانوف بر حسب تکرار در بازه همگرایی

- modification approach on bat algorithm for solving optimization problems," *Applied Soft Computing*, Vol. 28, pp. 259-2015.
- [11] X.-S. Yang, "Bat algorithm: literature review and applications," *arXiv preprint arXiv:1308.3900*, 2013.
- [12] Fister, X.-S. Yang, S. Fong, and Y. Zhuang, "Bat algorithm: Recent advances," in *computational intelligence and informatics (CINTI), 2014 IEEE 15th international symposium on*, 2014, pp. 163-167: IEEE.
- [13] A. K. Kar, "Bio inspired computing—A review of algorithms and scope of applications," *Expert Systems with Applications*, Vol. 59, pp. 20-32, 2016.
- [14] V. Kadirkamanathan, K. Selvarajah, and P. J. Fleming, "Stability analysis of the particle dynamics in particle swarm optimizer," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 10, No. 3, pp. 245-255, 2006.
- [15] F. Farivar and M. A. Shoorehdeli, "Stability analysis of particle dynamics in gravitational search optimization algorithm," *Information Sciences*, Vol. 337, pp. 25-43, 2016.
- [16] W. Metzner, "Echolocation behaviour in bats," *Science Progress (1933-)*, pp. 453-465, 1991.
- [17] H.-U. Schnitzler and E. K. Kalko, "Echolocation by Insect-Eating Bats: We define four distinct functional groups of bats and find differences in signal structure that correlate with the typical echolocation tasks faced by each group," *AIBS Bulletin*, Vol. 51, No. 7, pp. 557-569, 2001.
- [18] X.-S. Yang and X. He, "Bat algorithm: literature review and applications," *International Journal of Bio-Inspired Computation*, Vol. 5, No. 3, pp. 141-149, 2013.
- [19] R. B. King, *Beyond the quartic equation*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [20] M. Abramowitz and I. Stegun, "Solutions of quartic equations," *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, pp. 17-18, 1972.
- [21] R. Y. Nakamura, L. A. Pereira, K. Costa, D. Rodrigues, J. P. Papa, and X.-S. Yang, "BBA: a binary bat algorithm for feature selection," in *2012 25th SIBGRAPI conference on graphics, Patterns and Images*, 2012, pp. 291-297: IEEE.
- [22] C. Olech, "The Lyapunov theorem: its extensions and applications," in *Methods of nonconvex analysis*: Springer, 1990, pp. 84-103.
- [23] C. Gan, W. Cao, M. Wu, and X. Chen, "A new bat algorithm based on iterative local search and stochastic inertia weight," *Expert Systems with Applications*, Vol. 104, pp. 202-212, 2018.
- [24] Xu, Bin, et al. "Self-adaptive bat algorithm for large scale cloud manufacturing service composition." *Peer-to-Peer Networking and Applications* 11.5, 1115-1128, 2018.
- [25] Al-Betar, Mohammed Azmi, et al. "Bat-inspired algorithms with natural selection mechanisms for global optimization." *Neurocomputing* 273, 448-465, 2018.
- پارامتر به پارامترهای این الگوریتم، روابط به‌روزرسانی جدیدی پیشنهاد شده و سپس از روش لیپانوف برای به دست آوردن شرایط کافی پایداری و همگرایی به نقطه تعادل استفاده شده است. شرایط به دست آمده به دلیل استفاده از روش لیپانوف، محافظه‌کارانه‌اند. هنگامی که از روش لیپانوف برای تحلیل پایداری استفاده می‌شود، رعایت نکردن شرایط پایداری به معنی ناپایداری سیستم نیست؛ بلکه خارج از محدوده پایداری، پایداری و همگرایی الگوریتم تضمین نمی‌شود. برای پژوهش‌های آتی، می‌توان از تابع هزینه در تابع لیپانوف استفاده کرد یا عملگر جهش به الگوریتم افزود و سپس پایداری الگوریتم با جهش تحلیل شود.

مراجع

- [1] X.-S. Yang, "A new metaheuristic bat-inspired algorithm," in *Nature inspired cooperative strategies for optimization (NICSO 2010)*: Springer, 2010, pp. 65-74.
- [2] A. H. Gandomi and X.-S. Yang, "Chaotic bat algorithm," *Journal of Computational Science*, Vol. 5, No. 2, pp. 224-232, 2014.
- [3] X.-B. Meng, X. Z. Gao, Y. Liu, and H. Zhang, "A novel bat algorithm with habitat selection and Doppler effect in echoes for optimization," *Expert Systems with Applications*, Vol. 42, No. 17-18, pp. 6350-6364, 2015.
- [4] X. Cai, X.-z. Gao, and Y. Xue, "Improved bat algorithm with optimal forage strategy and random disturbance strategy," *International Journal of Bio-Inspired Computation*, Vol. 8, No. 4, pp. 205-214, 2016.
- [5] S. Mirjalili, S. M. Mirjalili, and X.-S. Yang, "Binary bat algorithm," *Neural Computing and Applications*, Vol. 25, No. 3-4, pp. 663-681, 2014.
- [6] F. Xue, Y. Cai, Y. Cao, Z. Cui, and F. Li, "Optimal parameter settings for bat algorithm," *International Journal of Bio-Inspired Computation*, Vol. 7, No. 2, pp. 125-128, 2015.
- [7] A. Chakri, R. Khelif, M. Benouaret, and X.-S. Yang, "New directional bat algorithm for continuous optimization problems," *Expert Systems with Applications*, Vol. 69, pp. 159-175, 2017.
- [8] Y. Zhou, Q. Luo, J. Xie, and H. Zheng, "A hybrid bat algorithm with path relinking for the capacitated vehicle routing problem," in *Metaheuristics and Optimization in Civil Engineering*: Springer, 2016, pp. 255-276.
- [9] G.-G. Wang, B. Chang, and Z. Zhang, "A multi-swarm bat algorithm for global optimization," in *Evolutionary Computation (CEC), 2015 IEEE Congress on*, 2015, pp. 480-485: IEEE.
- [10] S. Yılmaz and E. U. Küçüksille, "A new