

کاهش مرتبه سیستم با استفاده از چند جمله‌ای‌های لاگر و الگوریتم جستجوی هارمونی

حسن نصیری سلوکلو^۱، ملیحه مغفوری فرسنگی^۲

۱- کارشناس ارشد، بخش مهندسی برق- دانشگاه شهید باهنر- کرمان- ایران

hasannasirisoloklo@gmail.com

۲- دانشیار، بخش مهندسی برق- دانشگاه شهید باهنر - کرمان- ایران

mmaghfoori@uk.ac.ir

چکیده: این مقاله، به ارائه رهیافتی برای کاهش مرتبه سیستم‌ها، مبتنی بر چند جمله‌ای متعامد لاگر و الگوریتم جستجوی هارمونی می‌پردازد. به همین منظور، ساختار ثابت مناسبی برای مدل مرتبه کاهشی در نظر گرفته می‌شود. سپس با استفاده از الگوریتم جستجوی هارمونی با کمینه کردن یک تابع برازش، پارامترهای مدل مرتبه کاهشی به طور همزمان تعیین می‌شوند که تابع برازش، اختلاف میان l ضریب اول بسط لاگر مدل مرتبه کامل و l ضریب اول بسط لاگر مدل مرتبه کاهشی به طور متناظر تعریف شده است. برای ارضای شرط پایداری، از معیار روث استفاده می‌شود که به صورت قید در مسأله بهینه سازی وارد می‌گردد. روش پیشنهادی بر روی سه سیستم آزموده و با برخی روش‌های کاهش مرتبه موجود در مقالات مقایسه شده است. نتایج به دست آمده ضمن تایید روش پیشنهادی، افق تازه‌ای در کاهش مرتبه سیستم‌ها ترسیم می‌کند.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم جستجوی هارمونی، چند جمله‌ای لاگر، کاهش مرتبه، محک روث

۱- مقدمه

امروزه به علت بزرگ شدن و پیچیدگی اغلب سیستم‌ها، مدل ریاضی که برای تحلیل آنها نیز در نظر گرفته می‌شود، دارای بُعد بالا و متعاقباً پیچیدگی زیادی است. تحلیل و طراحی دقیق سیستم‌های ابعاد وسیع، به پیچیدگی محاسبات، طولانی شدن زمان شبیه سازی و در نتیجه طولانی شدن زمان تحلیل و طراحی منجر می‌گردد. همچنین علاوه بر این مشکلات، به علت بُعد بالای سیستم و کنترل کننده، پیاده سازی کنترل کننده، تعمیر و نگهداری آن نیز پرهزینه و پیچیده می‌شود.

یکی از بهترین و مؤثرترین رهیافت‌های ارائه شده برای غلبه بر چنین مشکلاتی، کاهش مرتبه سیستم‌هاست. در

این رهیافت، سیستم ابعاد وسیع مورد نظر را با سیستمی از مرتبه پایین به گونه‌ای تقریب می‌زنیم که اغلب مشخصه‌های اصلی سیستم ابعاد وسیع در مدل کاهش مرتبه یافته حفظ شود.

در ۵۰ سال اخیر، کاهش مرتبه سیستم‌های ابعاد وسیع مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است.

کاهش مرتبه اولین بار توسط دیویسون در رهیافت "تحلیل مودال" با استفاده از تکنیک‌های فضای حالت ارائه شد [۱]. سپس در سال‌های ۱۹۶۷ و ۱۹۶۹، چندین اصلاح برای رهیافت دیویسون ارائه شد [۲، ۳]. در سال ۱۹۶۸، از بسط‌های حوزه فرکانسی برای کاهش مرتبه سیستم‌های ابعاد وسیع استفاده شد [۴]. در این روش، تابع تبدیل سیستم ابعاد وسیع را به شکل نردبانی بسط داد و سپس مدل کاهش مرتبه یافته‌ای با همان ساختار تقریب زده شد.

در سال ۱۹۷۰، ویلسون به کاهش مرتبه بهینه سیستم‌های ابعاد وسیع پرداخت که اولین روش کاهش مرتبه‌ای بود که بهینه کردن مدل را در نظر می‌گرفت.

تاریخ ارسال مقاله : ۱۳۹۱/۲/۱۶

تاریخ پذیرش مقاله : ۱۳۹۲/۱۱/۰۶

نام نویسنده مسؤول : ملیحه مغفوری فرسنگی

نشانی نویسنده مسؤول : ایران - کرمان - دانشگاه شهید باهنر

کرمان - گروه برق

کاهش مرتبه سیستم با استفاده از چند جمله‌ای‌های لاگر و الگوریتم جستجوی هارمونی

مبتنی بر تقریب پید پرداختند [۲۴]. در سال ۲۰۰۳، کاهش مرتبه سیستم های ابعاد وسیع با استفاده از روش برش متعادل در محدوده فرکانسی در [۲۵] ارائه گردید و در سال بعد بهبودهایی برای این روش ارائه گردید [۲۶, ۲۷].

در دهه اخیر، استفاده از الگوریتم های تکاملی برای کاهش مرتبه سیستم های ابعاد وسیع به طور چشمگیری افزایش یافته است. در سال ۲۰۰۱، تقریب بهینه سیستم های خطی با استفاده از الگوریتم تکامل تفاضلی ارائه شد [۲۸]. در سال ۲۰۰۵ با استفاده از الگوریتم وراثتی روشی برای کاهش مرتبه سیستم های گسسته ارائه شد [۲۹]. در سال ۲۰۱۰، کومار و پراساد سیستم های بازه‌ای خطی را با استفاده از الگوریتم وراثتی و الگوریتم انبوه ذرات کاهش مرتبه دادند [۳۰]. در این دهه، استفاده از چند جمله ای لاگر برای کاهش مرتبه سیستم های ابعاد وسیع مورد توجه قرار گرفت [۳۱, ۳۲].

همچنین، در [۳۳, ۳۴] روش‌هایی برای کاهش مرتبه سیستم‌های ابعاد وسیع با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد و الگوریتم های تکاملی ارائه شد.

در این مقاله، با استفاده از چند جمله ای متعامد لاگر و الگوریتم جستجوی هارمونی به ارائه روشی برای کاهش مرتبه سیستم ها پرداخته شده است. در این روش، سیستم مرتبه کامل توسط چند جمله ای های لاگر بسط داده شده است. سپس I ضریب اول بسط لاگر سیستم اصلی به دست می‌آید. در ادامه، ساختار ثابت مناسبی برای مدل مرتبه کاهشی در نظر گرفته می شود که پارامتر های صورت و مخرج این مدل مرتبه کاهشی مجهول هستند. این پارامتر های مجهول با کمینه کردن خطای میان I ضریب اول بسط لاگر مدل مرتبه کامل با I ضریب اول بسط لاگر مدل مرتبه کاهشی با استفاده از الگوریتم هارمونی، تعیین می شوند. برای ارضای شرط پایداری از محک روث استفاده شده است که این شرط به صورت قید در مسأله بهینه سازی بیان می‌شود و در نتیجه مسأله بهینه سازی به مسأله بهینه سازی مقید تبدیل می شود. برای نشان دادن کارایی و دقت روش پیشنهادی، سه سیستم با استفاده از روش پیشنهادی کاهش مرتبه داده شده و با برخی روش های کاهش مرتبه مقایسه شده اند.

ویلسون از رهیافت بهینه سازی مبتنی بر کمینه سازی انتگرال مربع خطا استفاده نمود که خطا در آنجا اختلاف میان پاسخ ضربه مدل مرتبه کامل و پاسخ ضربه مدل کاهش مرتبه یافته‌اش بود [۶, ۵]. در [۷] از رهیافت روث برای تقریب فرکانس بالا استفاده شد که بعدها، این رهیافت بهبود داده شد [۸]. در [۹] از تقریب پید برای کاهش مرتبه سیستم های ابعاد وسیع استفاده شد.

سپس در [۱۰] با کمینه نمودن نرم L_1 و L_2 روشی برای کاهش مرتبه سیستم‌های ابعاد وسیع ارائه شد.

در اوایل دهه ۱۹۸۰، ایتلبرگ در [۱۱] و آبیستا در [۱۲] با کمینه کردن معادله خطا، به مدل کاهش مرتبه بسیار مناسبی از سیستم ابعاد وسیع دست یافتند. در سال ۱۹۸۱، بیو به ارائه روشی ترکیبی پرداخت که در آن با استفاده از محک میهایلوف و تقریب پید به کاهش مرتبه سیستم های ابعاد وسیع به صورت پایدار پرداخت [۱۳]. در همین سال، مور روش کاهش مرتبه مبتنی بر تعادل معمولی را ارائه نمود که مورد توجه بسیاری قرار گرفت [۱۴]. در این روش با استفاده از مفهوم ساختار متعادل و مفاهیم گرامیان کنترل پذیری و رؤیت پذیری، راهی برای تشخیص حالت های کم اهمیت تر ارائه شد. پس از مور، گلوور با ارائه مفهومی مشابه به نام تقریب بهینه هانکل به کاهش مرتبه سیستم های ابعاد وسیع پرداخت [۱۵]. در سال ۱۹۸۴، انس با استفاده از توابع وزنی ورودی- خروجی، کاهش مرتبه را در برخی فرکانس های خاص ارائه نمود [۱۶]. ده سال بعد از ارائه روش انس، اسریرم و اندرسون کران بالایی برای خطای تقریب روش وزنی انس ارائه نمودند [۱۷, ۱۸].

در حد فاصل سال های ۱۹۸۴ تا ۱۹۹۰ روش‌های ترکیبی بسیاری مورد توجه قرار گرفت که در آنها با استفاده از یک معیار پایداری به تضمین پایداری مدل کاهش مرتبه یافته پرداخته و سپس با استفاده از یکی از تکنیک های کمینه نمودن خطا و یا با کمینه کردن شاخص‌های عملکرد سیستم به تعیین مدل مرتبه کاهشی پرداختند [۱۹-۲۲].

در اواخر دهه ۸۰ میلادی، اندرسون و لیو به ارائه روشی بسیار دقیق با نام SP یا انحراف تکین برای دستیابی به عملکرد مطلوب تر در فرکانس های پایین پرداختند [۲۳].

در سال ۱۹۹۵، فلدمن و فروند به ارائه روشی نوین

ضرایب چند جمله ای لاگر، f_i ، با کمینه کردن انتگرال مربع خطای وزن دار شده به صورت زیر به دست می آیند:

$$\varepsilon = \int_0^{\infty} [f(x) - f^T L(x)]^2 e^{-x} dx \quad (7)$$

و در نتیجه داریم:

$$f_i = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_i(x) dx \quad (8)$$

بنابراین، با در نظر گرفتن l جمله اول (۴) می توان تقریب مناسبی از $f(x)$ به دست آورد.

۳- الگوریتم جستجوی هارمونی

الگوریتم جستجوی هارمونی^۱ در سال ۲۰۰۱ توسط جیم و همکارانش ارائه شد [۳۶، ۳۷]. این الگوریتم در زمره الگوریتم های ابتکاری است که برای بهینه سازی در فضای پیوسته استفاده می شود. این الگوریتم از فرآیند نواخت موسیقی و تلاش برای یافتن یک هارمونی خارق العاده طی آن، الهام گرفته شده است. در این فرآیند در جستجوی یک هارمونی جذاب و دلنشین (یک حالت کامل از هارمونی ها) براساس معیار زیبایی هارمونی هستیم. به طور مشابه، در مسائل مهندسی و فرآیندهای بهینه سازی نیز جستجو برای پیدا کردن بهترین جواب براساس تابع هدف مورد نظر است. در ادوات موسیقی، نت انتخابی، تعیین کننده زیبایی هارمونی تولیدی است.

در فرآیند موسیقی نوازنده شروع به نواختن می کند و در جستجوی یک هارمونی بهتر است. نوازنده، با توجه به کارهای قبلی خود، سعی می کند بهترین هارمونی قبلی خود را بنوازد یا آن را بهبود بخشد. همچنین، می تواند موسیقی جدیدی تولید کند که هیچ تجربه ای از قبل درباره آن ندارد. در فرآیند نواخت موسیقی بدون هرگونه تجربه قبلی، نوازنده هر نتی را می تواند در فاصله مجاز خود به صدا درآورد و این نت به همراه دیگر نت ها یک بردار هارمونی تولید می کند. اگر هارمونی تولید شده مطلوب باشد، در ذهن نوازنده ذخیره شده، احتمال تولید هارمونی های بهتر را در تمرین ها و نواخت های بعدی افزایش می دهد.

ادامه این مقاله، این گونه سازماندهی شده است که در بخش دوم، توضیحاتی درباره چند جمله ای های متعامد لاگر ارائه می شود. بخش سوم به معرفی الگوریتم جستجوی هارمونی می پردازد. روش پیشنهادی در بخش چهارم ارائه گردیده است. در بخش پنجم شبیه سازی و نتایج ارائه می شود و در نهایت، بخش ششم به جمع بندی می پردازد.

۲- چند جمله ای های لاگر

چند جمله ای های لاگر را که با L_0, L_1, \dots نشان داده می شوند، می توان با استفاده از فرمول رودریگوئز به صورت زیر تعریف نمود:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad (1)$$

علاوه بر فرمول رودریگوئز، چند جمله ای های لاگر را می توان با استفاده از رابطه بازگشتی زیر نیز تعریف نمود [۳۵]:

$$L_{i+1}(x) = \frac{1}{i+1} ((2i+1-x)L_i(x) - iL_{i-1}(x)) \quad (2)$$

که در آن L_0 و L_1 به ترتیب برابر با ۱ و $1-x$ هستند.

چند جمله ای لاگر در بازه $[0, \infty)$ نسبت به تابع وزنی e^{-x} یک متعامد است؛ یعنی:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_i(x) L_j(x) dx = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

تابع $f(x)$ را که در بازه $[0, \infty)$ دوبار انتگرال پذیر است، می توان به صورت مجموع چند جمله ای های لاگر تقریب زد؛ یعنی:

$$f(x) \cong \sum_{i=0}^{m-1} f_i L_i(x) = f^T L(x) \quad (4)$$

که T نشان دهنده ترانهاده و m یک عدد است. بردار ضرایب لاگر f و بردار لاگر $L(x)$ به صورت زیر هستند:

$$f = [f_0, f_1, \dots, f_{m-1}]^T \quad (5)$$

$$L(x) = [L_0(x), L_1(x), \dots, L_{m-1}(x)]^T \quad (6)$$

کاهش مرتبه سیستم با استفاده از چند جمله‌ای‌های لاگر و الگوریتم جستجوی هارمونی

الگوریتم (بیشترین تعداد تکرار).

مرحله ۲- مقداردهی اولیه حافظه هارمونی. مقداردهی اولیه حافظه کاملاً تصادفی بوده، تعداد بردارهای تولید شده برابر با اندازه حافظه هارمونی است. حافظه هارمونی اولیه به همراه مقادیر متناظر تابع هدف ذخیره می‌شوند. رابطه (۹) ساختار حافظه هارمونی را نشان می‌دهد:

$$HM = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{HMS,1} & \cdots & x_{HMS,N} \end{bmatrix} \quad (9)$$

در رابطه (۹)، هر سطر معرف یک هارمونی N متغیره و HMS اندازه حافظه هارمونی است.

مرحله ۳- تولید یک هارمونی جدید از حافظه هارمونی بردار هارمونی جدید.

بر اساس $x^{new} = [x_1^{new} \ x_2^{new} \ \cdots \ x_N^{new}]$ براساس سه قانون الف) انتخاب از حافظه؛ ب) تعدیل مقدار انتخابی از حافظه و ج) انتخاب تصادفی تولید می‌شود. رابطه (۱۰) نحوه اجرای این قوانین را نمایش می‌دهد:

$$x_1^{new} \in \begin{cases} \{x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{HMS,i}\} & \text{w.p. HMCR} \\ [x_{1,\min}, x_{1,\max}] & \text{w.p. 1-HMCR} \end{cases} \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)، با احتمال^۹ HMCR یکی از مقادیر حافظه و با احتمال (1-HMCR) مقداری تصادفی در بازه تغییرات مجاز تولید می‌شود. به عبارت دیگر، ابتدا یک عدد تصادفی در بازه [۰،۱] تولید و در صورت کمتر بودن نسبت به HMCR یکی از مقادیر موجود در حافظه انتخاب می‌شود؛ در غیر این صورت، مقداری تصادفی در بازه تغییرات آن متغیر تولید می‌شود. مقدار HMCR باید در بازه [۰،۱] انتخاب شود. مقدار یک برای HMCR باعث قرار گرفتن مسأله در یک بهینه محلی می‌شود. مقدار 1-HMCR مشابه عملگر جهش در الگوریتم وراثتی از قرار گرفتن در بهینه های محلی جلوگیری کرده، به تنوع حافظه کمک می‌کند.

هر مقداری که از حافظه انتخاب شود، می‌تواند طی یک جستجوی محلی در همسایگی خود، متغیری جدید

مهمترین بخش در جستجوی هارمونی، حافظه هارمونی است که شامل تعداد مشخصی بردار هارمونی و هر بردار نتیجه یک عمل نوازندگی است. برای مثال، به جاز که ترکیبی از سه ابزار موسیقی است، توجه کنید. اگر هر کدام از این ادوات یک مقدار نت مجاز انتخاب کنند، خروجی آن یک بردار از هارمونی‌ها خواهد بود که اگر کیفیت و زیبایی آن از بدترین تجربه قبلی بهتر باشد، جایگزین آن در حافظه هارمونی می‌شود. عمل نوازندگی تکرار می‌شود تا یک هارمونی خارق العاده در حافظه هارمونی پیدا شود.

در بهینه سازی واقعی، هر نوازنده با یک متغیر و نت صوتی آن با مقدار نسبت داده شده به متغیر جایگزین می‌شود. چنانکه بیان شد، نوازنده برای نواختن یک نت سه انتخاب دارد: یکی از نت های موجود در حافظه خود را بنوازد، نتی نزدیک به یکی از نت های موجود در حافظه خود را بنوازد یا یک نت کاملاً تصادفی در بازه تغییرات مجاز ایجاد کند.

در الگوریتم جستجوی هارمونی نیز برای تولید یک بردار جدید از متغیرها(بردار هارمونی) مقدار هر متغیر طبق یکی از سه قانون زیر تعیین می‌شود:

الف) انتخاب یکی از مقادیر موجود در حافظه هارمونی^۱؛
ب) انتخاب مقداری در همسایگی یکی از مقادیر حافظه هارمونی^۲؛

ج) انتخاب مقداری برای متغیر از محدوده مجاز(خارج از حافظه هارمونی) به صورت تصادفی^۴.

این الگوریتم شامل پنج مرحله است:

مرحله ۱- تعریف مسأله بهینه سازی و مقداردهی اولیه پارامترهای الگوریتم. مسأله بهینه سازی به صورت کمینه یا بیشینه کردن تابع هدف $f(x)$ است؛ به گونه که متغیر های مسأله در محدوده مجاز خود قرار گیرند.

همچنین، پارامترهای الگوریتم که در این مرحله مقداردهی اولیه می‌شوند، عبارتند از: تعداد متغیرهای تصمیم (N) و بازه تغییرات آنها، اندازه حافظه هارمونی^۵ (HMS)، احتمال انتخاب متغیر جدید از حافظه هارمونی^۶ (HMCR)، احتمال تعدیل متغیر انتخابی از حافظه هارمونی^۷ (PAR) و پهنای باند تعدیل^۸ (bw)، و معیار اتمام

می‌گیریم. ساختاری ثابت برای مدل مرتبه کاهشی همانند (۱۲) در نظر می‌گیریم که در آن ضرایب صورت و مخرج، پارامترهای مجهول مدل مرتبه کاهشی هستند که توسط الگوریتم جستجوی هارمونی تعیین خواهند شد. هدف بهینه سازی، یافتن بهترین پارامترها برای G_r است. اگر f_i و f_i' به ترتیب ضرایب بسط لاگر مدل مرتبه کامل و مدل مرتبه کاهشی باشند، پارامترهای مدل مرتبه کاهشی با کمینه کردن تابع برازش زیر تعیین خواهند شد:

$$J^* = \sum_{i=0}^l |f_i - f_i'| \quad (13)$$

چون رهیافت پیشنهادی باید پایداری مدل مرتبه کاهشی را نیز تضمین کند، از محک روث برای تعیین شرط پایداری به صورت زیر استفاده شده است [۳۸]:

مخرج مدل مرتبه کاهشی (۱۲) را می‌توان به صورت

زیر نشان داد:

$$s^r + h_1 s^{r-1} + (h_2 + h_3 + \dots + h_r) s^{r-2} + h_1 (h_3 + h_4 + \dots + h_r) s^{r-3} + \dots + h_{1+k} h_{3+k} \dots h_{r-2} h_r \quad (14)$$

که ضرایب دو سطر اول آرایه روث به همراه عناصر ستون اول را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$1, h_1, h_2, h_1 h_3, h_2 h_4, h_1 h_3 h_5, \dots, h_{1+k} h_{3+k} \dots h_{r-2} h_r \quad (15)$$

که k برای r زوج ۱ و برای r فرد، ۰ است.

با مقایسه درایه های سطر اول با $1, d_2, d_4, \dots$ و سطر

دوم با d_1, d_3, d_5, \dots ، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} d_1 = h_1 \\ d_2 = (h_2 + h_3 + \dots + h_r) \\ d_3 = h_1 (h_3 + h_4 + \dots + h_r) \\ \vdots \\ d_r = (h_{1+k} h_{3+k} \dots h_{r-2} h_r) \end{cases} \quad (16)$$

با قرار دادن روابط بالا در مخرج مدل مرتبه کاهشی،

رابطه (۱۴) به دست می‌آید.

بنابراین، شرط لازم و کافی برای این که تمام قطب‌های

تولید کند که این جستجو با شعاع bw و احتمال PAR انجام می‌گیرد. مقدار انتخابی از حافظه با احتمال 1-PAR مستقیماً و بدون هیچ گونه تغییری به هارمونی جدید منتقل می‌گردد. سپس مقدار به دست آمده برای هر متغیر در بردار جدید بررسی می‌شود تا در بازه مجاز باشد؛ در غیر این صورت، نزدیکترین مقدار مجاز جایگزین آن می‌گردد.

مرحله ۴- به روز رسانی حافظه هارمونی. اگر هارمونی جدید از بدترین هارمونی موجود در حافظه بهتر باشد، به همراه مقدار تابع هدف متناظر، جایگزین آن می‌شود و بدترین هارمونی حافظه، حذف می‌گردد.

مرحله ۵- تکرار مراحل سوم و چهارم تا رسیدن به معیار پایان الگوریتم. معیار اتمام الگوریتم عموماً به صورت برآورده شدن یک شرط یا رسیدن به بیشترین تعداد تکرار تعریف می‌شود.

۴- روش پیشنهادی

سیستم مرتبه کامل اکیداً سره و پایدار از درجه n زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}{s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n} \quad (11)$$

که در آن a_i و b_i ثابت‌های معلوم هستند. قصد داریم به مدل مرتبه کاهشی پایدار از درجه r (r کوچکتر از n) به گونه ای دست یابیم که مشخصه های اصلی و مهم سیستم مرتبه کامل حفظ شوند. فرض کنید مدل مرتبه کاهشی پایدار به صورت زیر است:

$$G_r(s) = \frac{c_1 s^{r-1} + c_2 s^{r-2} + \dots + c_r}{s^r + d_1 s^{r-1} + d_2 s^{r-2} + \dots + d_r} \quad (12)$$

که در آن d_i و c_i ثابت‌های مجهول هستند.

برای دستیابی به مدل مرتبه کاهشی به وسیله روش پیشنهادی، ابتدا سیستم مرتبه کامل (۱۱) را به صورت مجموع چند جمله ای های لاگر بسط می‌دهیم. سپس l ضریب اول بسط سری لاگر مدل مرتبه کامل را در نظر

کاهش مرتبه سیستم با استفاده از چند جمله‌ای‌های لاگر و الگوریتم جستجوی هارمونی

های مجهول هستند که در گام بعدی به دست خواهند آمد.
گام سوم: از الگوریتم جستجوی هارمونی برای تعیین پارامترهای مجهول مدل مرتبه کاهش استفاده می‌نماییم. هدف بهینه سازی، یافتن بهترین پارامترهای G_r است. بنابراین، هر هارمونی یک بردار d بعدی است که d برابر با $d_i + c_i$ است. هر هارمونی یک جواب برای G_r است و برای هر هارمونی، بسط لاگر به دست می‌آید. با استفاده از تابع هدف تعریف شده در (۱۹)، هر هارمونی، ارزیابی می‌شود و الگوریتم برای یافتن هارمونی با بهترین تابع هدف، J_{best} ، تا زمان شرط پایان تحقق به جستجو می‌پردازد. در این مرحله، بهترین پارامتر که متناظر با J_{best} است، به عنوان پارامترهای مدل مرتبه کاهش تعیین می‌شود.

۵- شبیه سازی و نتایج

در این بخش برای نشان دادن کارایی و دقت رهیافت پیشنهادی، سه سیستم نمونه کاهش مرتبه داده شده‌اند. برای سهولت در درک رهیافت، روندی گام به گام برای مثال ۱ ارائه شده است.

مثال ۱: مدل مرتبه ۸ ارائه شده توسط پارامتر در [۳۹] را

در نظر بگیرید.

$$G(s) = \frac{18s^7 + 514s^6 + 5982s^5 + 36380s^4 + 122664s^3 + 222088s^2 + 185760s + 40320}{s^8 + 36s^7 + 546s^6 + 4536s^5 + 22449s^4 + 67284s^3 + 118124s^2 + 109584s + 40320} \quad (20)$$

گام ۱: با توجه به توضیحات بخش ۲، بسط لاگر

سیستم مرتبه کامل (۲۰) را به دست می‌آوریم:

$$G(s) = (151.4633) \times (1) + (-10.0195) \times (-s+1) + (-13.4012) \times \left[\frac{1}{2}(s^2 - 4s + 2) \right] + (-9.1296) \times \left[\frac{1}{6}(-s^3 + 9s^2 - 18s + 6) \right] + (-5.9086) \times \left[\frac{1}{24}(s^4 - 16s^3 + 72s^2 - 96s + 24) \right] \quad (21)$$

مدل مرتبه کاهش اکیدا در نیم صفحه چپ باشند، عبارت است از:

$$\begin{cases} h_1 > 0 \\ h_2 > 0 \\ \vdots \\ h_r > 0 \end{cases} \quad (17)$$

و در نتیجه:

$$\begin{cases} d_1 > 0 \\ d_2 > 0 \\ \vdots \\ d_r > 0 \end{cases} \quad (18)$$

بنابراین، برای این که مدل مرتبه کاهش پایدار باشد، پارامترهای مدل مرتبه کاهش، با کمینه کردن (۱۳) و رعایت شرط (۱۸) تعیین می‌شوند که مسأله بهینه سازی به مسأله بهینه سازی مقید تبدیل می‌شود. به عبارت دیگر، مدل مرتبه کاهش با کمینه کردن تابع برازش زیر به دست می‌آید:

$$J = \sum_{i=0}^l |f_i - f_i'| \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (19)$$

subject to $d_j > 0 \quad j = 1, 2, \dots, r$

بنابراین، مدل مرتبه کاهش به گونه ای به دست می‌آید که l ضریب اول بسط لاگر مدل مرتبه کامل به طور متناظر با l ضریب اول بسط لاگر مدل مرتبه کاهش برابر باشد. مدل مرتبه کاهش که توسط این روش به دست می‌آید، مشخصه های اصلی و مهم سیستم را حفظ می‌کند.

روش پیشنهادی در گام‌های زیر خلاصه می‌شود:

گام اول: بسط لاگر سیستم مرتبه کامل (۱۱) را به دست می‌آوریم.

گام دوم: ساختار ثابت مناسبی همانند (۱۲) برای مدل مرتبه کاهش در نظر می‌گیریم که در آن c_i و d_i پارامتر

پاسخ فرکانسی مدل مرتبه کاهشی با دیگر روش‌های رایج کاهش مرتبه، از قبیل: برش متعادل (BT) [۴۰] و روش هانکل (HSV) [۴۰] و همچنین، روش کاهش مرتبه ارائه شده توسط پارمر [۳۹] مقایسه شده است. شکل‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهند که مدل مرتبه کاهشی به‌دست آمده توسط روش پیشنهادی، نسبت به دیگر روش‌های کاهش مرتبه به مدل اصلی نزدیکتر است. علاوه بر این، در جدول (۱) برخی ویژگی‌های مهم، از قبیل: مقدار حالت ماندگار، زمان صعود، زمان نشست و بیشینه فراجهش نشان داده شده است. همچنین، معیار انتگرال مربع خطا و مقدار نرم H_∞ خطا، که خطا اندازه اختلاف میان پاسخ پله سیستم مرتبه کامل با مدل مرتبه کاهشی آن است، در جدول (۱) مقایسه شده است.

به وضوح مشاهده می‌شود که مشخصه‌های مدل مرتبه کاهشی پیشنهادی نسبت به دیگر روش‌های کاهش مرتبه، به مشخصه‌های سیستم اصلی بسیار نزدیکتر است. همچنین، نمودار $e = |y - y_r|$ در شکل (۳) برای مدل‌های مرتبه کاهشی رسم شده است. این شکل نشان دهنده آن است که خطای به‌دست آمده توسط روش پیشنهادی در این مقاله، بسیار کمتر از دیگر روش‌های کاهش مرتبه است.

گام ۲: ساختار ثابت مناسبی برای مدل مرتبه کاهشی در نظر می‌گیریم:

$$G_{Laguerre}(s) = \frac{c_0 s^2 + c_1 s + c_2}{s^3 + d_0 s^2 + d_1 s + d_2} \quad (22)$$

که d_i و c_i پارامترهای مجهول مدل مرتبه کاهشی هستند.

گام ۳: در این مرحله، از الگوریتم جستجوی هارمونی برای تعیین پارامترهای مجهول (۲۲) استفاده می‌شود. چون هدف بهینه‌سازی یافتن بهترین پارامترهای $G_r(s)$ است، بنابراین، هر هارمونی یک بردار d بعدی است که $d = 6$ است. HMS برابر با ۶، HMCR و عدد ارزیابی به ترتیب ۰٫۹ و ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است. هر هارمونی جوابی برای $G_r(s)$ است و برای هر جواب (هارمونی)، بسط لاگر به‌دست می‌آید. هر هارمونی با استفاده از تابع هدف تعریف شده در (۱۹) برای یافتن بهترین J ارزیابی می‌شود تا شرط اتمام برقرار شود. در این مرحله، با استفاده از الگوریتم جستجوی هارمونی و کمینه کردن تابع برازش (۱۹)، مدل مرتبه کاهشی زیر به‌دست می‌آید:

$$G_{Laguerre}(s) = \frac{16.153s + 5.163}{s^2 + 6.473s + 5.127} \quad (23)$$

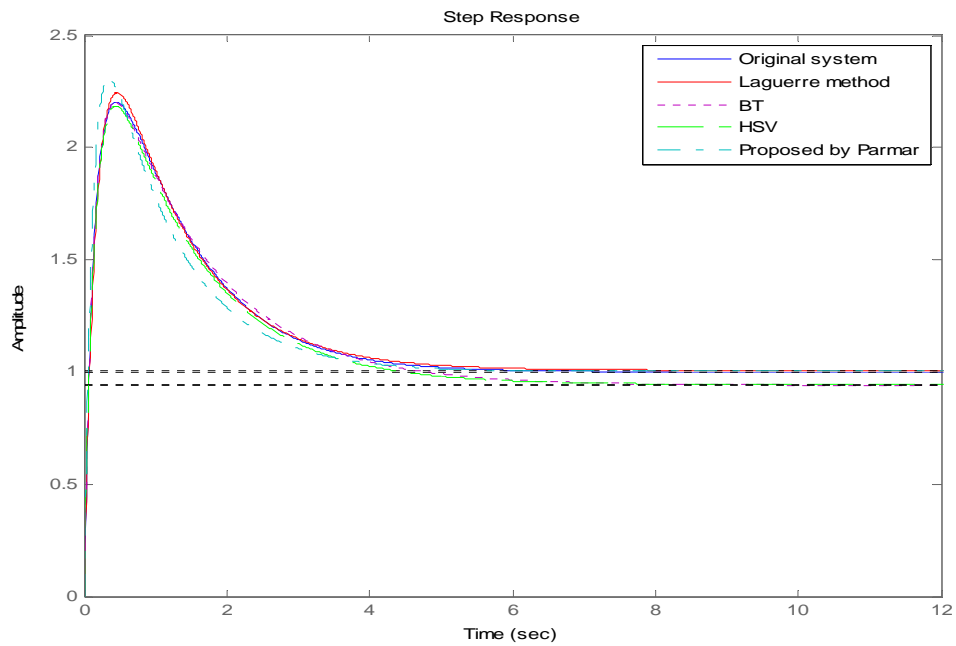
بسط لاگر مدل مرتبه کاهشی به‌دست آمده به صورت

رابطه (۲۴) است:

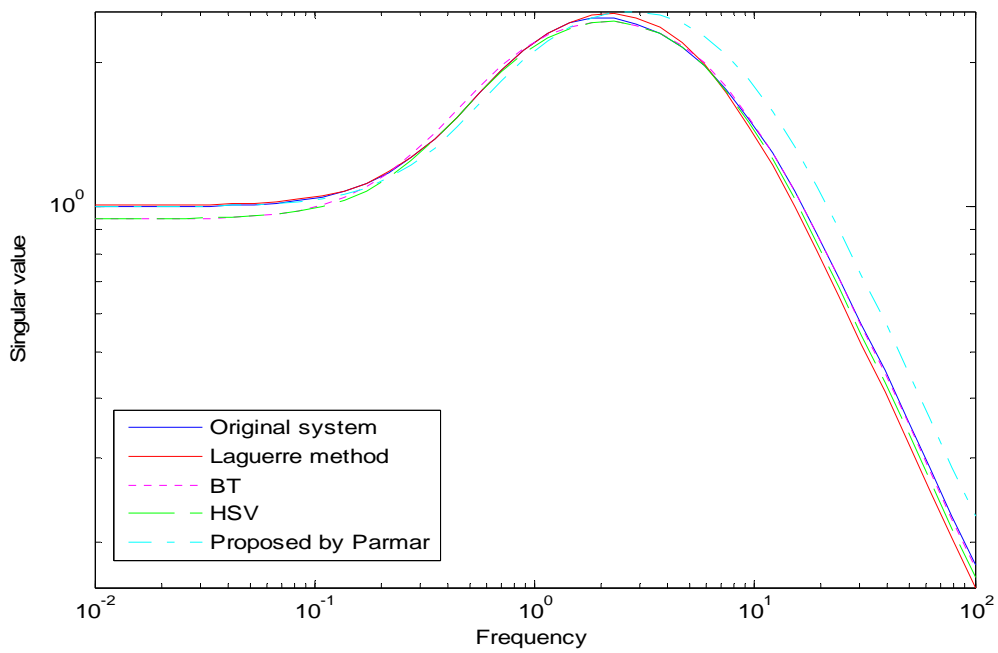
$$G_{Laguerre}(s) = (151.4633) \times (1) + (-9.3894) \times (-s+1) + (-13.4036) \times \left[\frac{1}{2}(s^2 - 4s + 2) \right] + (-9.1683) \times \left[\frac{1}{6}(-s^3 + 9s^2 - 18s + 6) \right] + (-5.9122) \times \left[\frac{1}{24}(s^4 - 16s^3 + 72s^2 - 96s + 24) \right] \quad (24)$$

با مقایسه (۲۱) و (۲۴) به وضوح مشاهده می‌شود که تقریب بسیار مناسبی از مدل مرتبه کامل به‌دست آمده است. برای نشان دادن دقت و کارایی روش پیشنهادی، پاسخ پله و

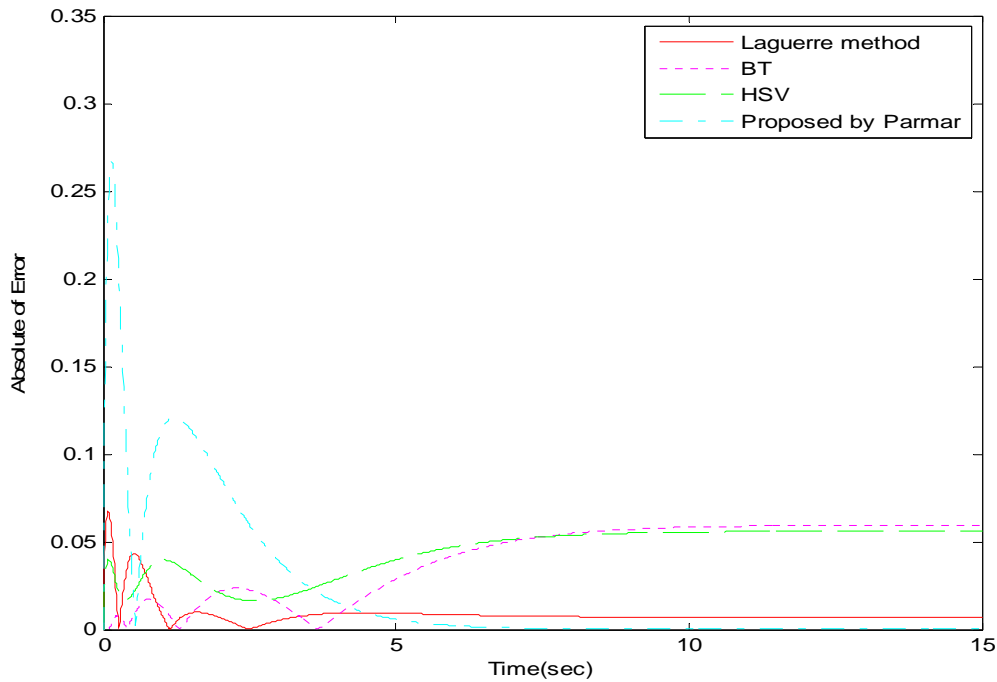
کاهش مرتبه سیستم با استفاده از چند جمله‌ای‌های لاگر و الگوریتم جستجوی هارمونی



شکل (۱): پاسخ پله سیستم اصلی و مدل‌های کاهش مرتبه یافته توسط روش پیشنهادی و دیگر روش‌های کاهش مرتبه برای مثال ۱



شکل (۲): پاسخ فرکانسی مدل اصلی و مدل‌های کاهش مرتبه یافته توسط روش پیشنهادی و دیگر روش‌های کاهش مرتبه برای مثال ۱



شکل (۳): نمودار اندازه خطا برای مدل‌های کاهش مرتبه یافته توسط روش پیشنهادی و دیگر روش‌های کاهش مرتبه برای مثال ۱

جدول (۱): مقایسه روش‌های کاهش مرتبه برای مثال ۱

نرم H_{∞} خطا	انتگرال مربع خطا	زمان نشست(ثانیه)	زمان صعود(ثانیه)	پیشینه فراجهش(%)	مقدار حالت ماندگار به ورودی پله واحد	
-	-	۴/۸۲	۰/۰۵۶۹	۱۲۰	۱	سیستم اصلی
۰/۰۶۷۰	۰/۰۰۲	۴/۹	۰/۰۶۲۷	۱۲۳	۱/۰۱	لاگر- هارمونی
۰/۰۵۹۵	۰/۰۳۱۴	۵/۹۷	۰/۰۵۲۹	۱۳۴	۰/۹۴	برش متعادل
۰/۰۵۵۹	۰/۰۳۲۶	۵/۴۸	۰/۰۵۵۶	۱۳۲	۰/۹۴۴	هانکل
۰/۲۶۶۸	۰/۰۳۶۸	۴/۴	۰/۰۴۳۹	۱۳۰	۱	پیشنهاد شده توسط پارمر

کاهشی به دست آمده به صورت رابطه (۲۶) است:

$$G_{laguerre}(s) = \frac{9.397s + 5.559}{s^2 + 4.457s + 5.571} \quad (26)$$

پاسخ پله سیستم اصلی و مدل مرتبه کاهشی در شکل (۴) نشان داده شده است. در این شکل، پاسخ پله سیستم اصلی با پاسخ پله مدل‌های به دست آمده توسط روش پیشنهادی، روش برش متعادل، روش هانکل و روش پیشنهادی توسط سینغ مقایسه شده است. همچنین، در شکل (۵) نمودار اندازه خطا که خطا اختلاف میان پاسخ پله مدل

مثال ۲:

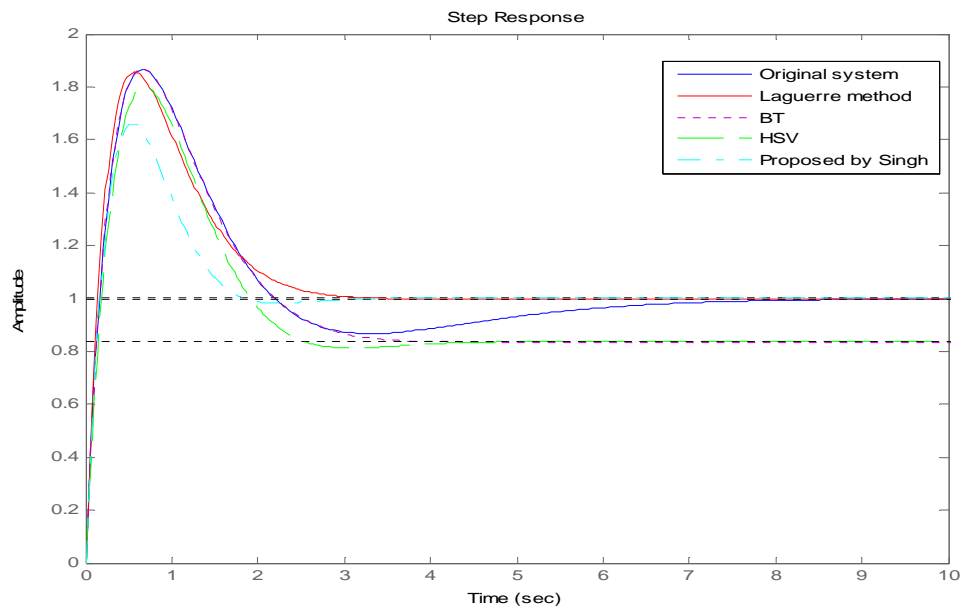
در [۳۸]، با استفاده از تقریب روث-پید و با کمک الگوریتم لوس-جاکولا روشی برای کاهش مرتبه سیستم ارائه شده است. برای مقایسه روش پیشنهادی در این مقاله با روش پیشنهادی در [۳۸]، مدل داده شده در [۳۸] به عنوان سیستم دوم در نظر گرفته شده است:

$$G(s) = \frac{8s^2 + 6s + 2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} \quad (25)$$

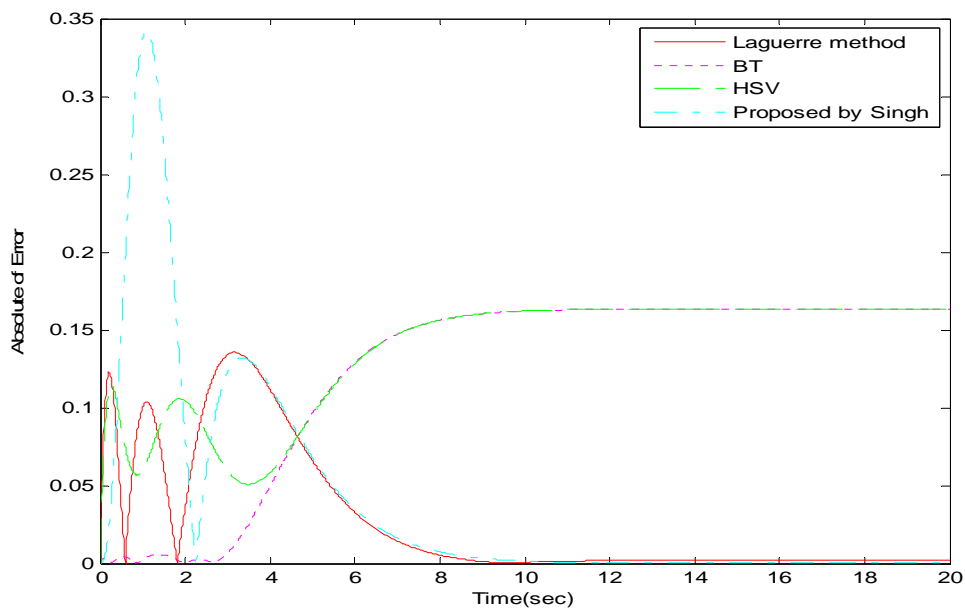
با توجه به توضیحات ارائه شده برای مثال ۱، مدل مرتبه

کاهش مرتبه سیستم با استفاده از چند جمله‌ای‌های لاگر و الگوریتم جستجوی هارمونی

مرتبه کامل و مدل‌های مرتبه کاهشی است، نشان داده شده است. یک بار دیگر، مشخصه‌های مهم سیستم، از قبیل: بیشینه فراجهش، زمان صعود، زمان نشست، مقدار حالت ماندگار، شاخص انتگرال مربع خطا و نرم H_∞ خطا در جدول (۲) میان روش‌های کاهش مرتبه مقایسه شده است. نتایج حاصله نشان دهنده دقت و کارایی بالاتر روش پیشنهادی نسبت به دیگر روش‌های کاهش مرتبه است.



شکل (۴): پاسخ پله سیستم اصلی و مدل‌های کاهش مرتبه یافته توسط روش پیشنهادی و دیگر روش‌های کاهش مرتبه برای مثال ۲



شکل (۵): نمودار اندازه خطا برای مدل‌های کاهش مرتبه یافته توسط روش پیشنهادی و دیگر روش‌های کاهش مرتبه برای مثال ۲

جدول (۲): مقایسه روش های کاهش مرتبه برای مثال ۲

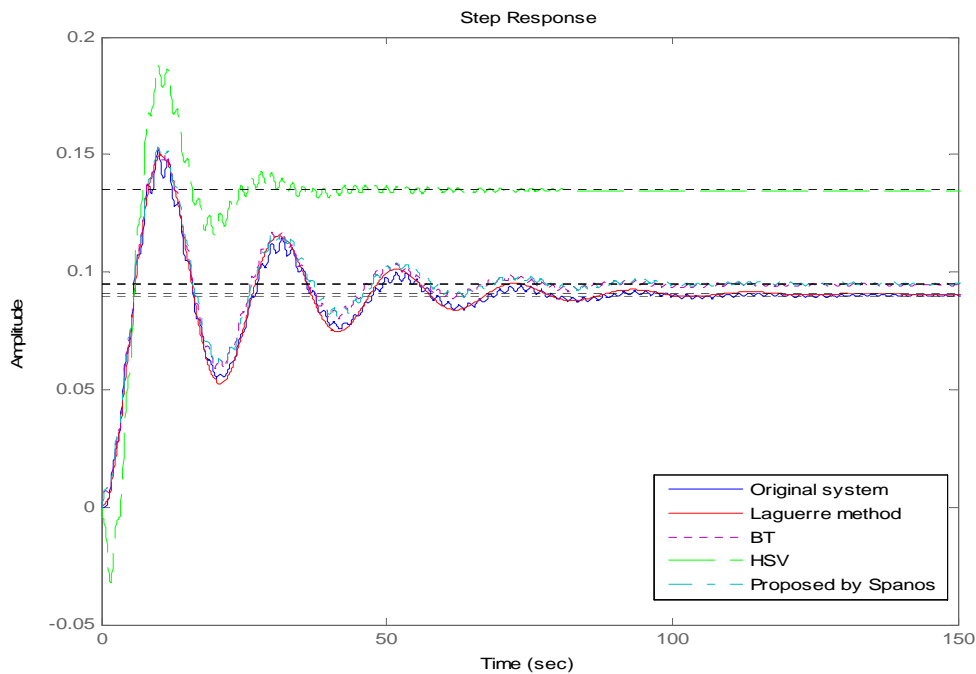
نرم H_{∞} خطا	اننگرال مربع خطا	زمان نشست(ثانیه)	زمان صعود(ثانیه)	بیشینه فراجهش(%)	مقدار حالت ماندگار به ورودی پله واحد	
-	-	۶/۷۴	۰/۱۲۹	۸۶/۵	۱	سیستم اصلی
۰/۱۳۵۶	۰/۰۴۹۲	۲/۷۱	۰/۱۱	۸۵/۹	۰/۹۹۸	لاگر- هارمونی
۰/۱۶۳۵	۰/۳۸۰۲	۳/۱۵	۰/۱۰۳	۱۲۳	۰/۸۳۶	برش متعادل
۰/۱۶۳۵	۰/۴۰۴۳	۳/۴۴	۰/۱۱۸	۱۱۵	۰/۸۳۶	هانکل
۰/۳۴۲۵	۰/۱۴۰۴	۱/۷۱	۰/۱۳	۶۶/۱	۱	پیشنهاد شده توسط سینغ

مثال ۳:

نتایج به دست آمده توسط روش پیشنهادی با برخی روش های رایج کاهش مرتبه، از قبیل: روش برش متعادل، روش هانکل و روش ارائه شده در [۴۱] در شکل های (۶) و (۷) و در جدول (۳) مقایسه شده اند. با توجه به شکل های (۶) و (۷) و جدول (۳) به وضوح مشاهده می شود که نتایج حاصله توسط روش پیشنهادی نسبت به روش های دیگر کاهش مرتبه تشابه بیشتری به مدل اصلی دارد.

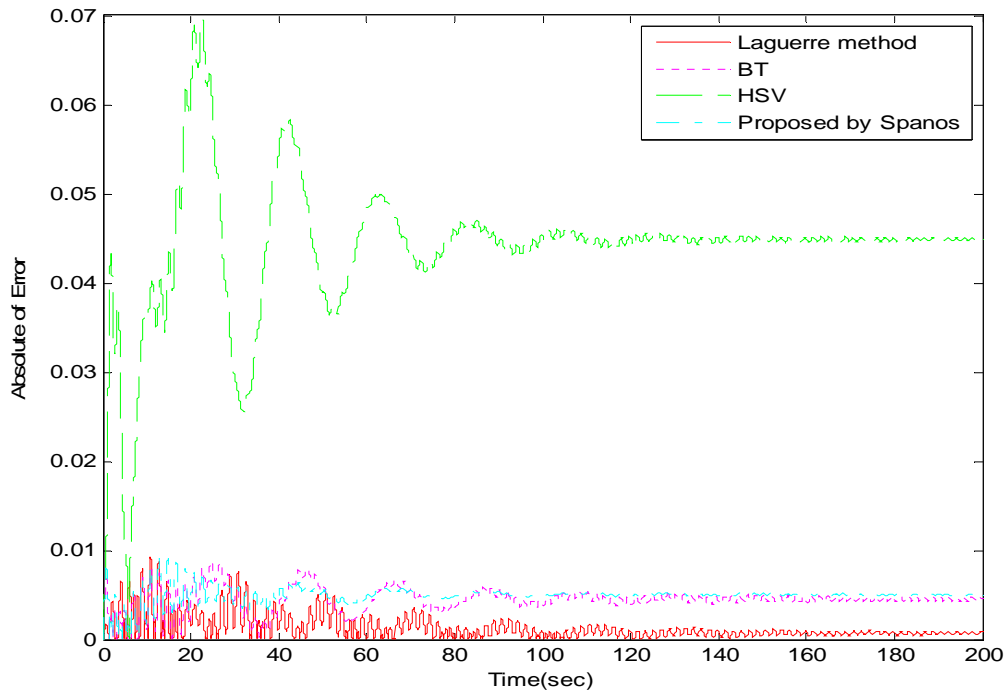
سیستم سومی که در این مقاله کاهش داده شده، برگرفته از مرجع [۴۱] است. با توجه به توضیحات ارائه شده برای مثال ۱، مدل مرتبه کاهشی به دست آمده برای این سیستم به صورت زیر است:

$$G_{laguerre}(s) = \frac{0.0012s^3 + 0.0103s^2 - 0.0192s + 0.0909}{s^4 + 0.2123s^3 + 10.7164s^2 + 0.9022s + 1.0025} \quad (27)$$



شکل (۶): پاسخ پله سیستم اصلی و مدل های کاهش مرتبه یافته توسط روش پیشنهادی و دیگر روش های کاهش مرتبه برای مثال ۳

کاهش مرتبه سیستم با استفاده از چند جمله‌ای‌های لاگر و الگوریتم جستجوی هارمونی



شکل (۷): نمودار اندازه خطا برای مدل‌های کاهش مرتبه یافته توسط روش پیشنهادی و دیگر روش‌های کاهش مرتبه برای مثال ۳

جدول (۳): مقایسه روش‌های کاهش مرتبه برای مثال ۳

نرم H_{∞} خطا	انتگرال مربع خطا	زمان نشست (ثانیه)	زمان صعود (ثانیه)	بیشینه فراجهش (%)	مقدار حالت ماندگار به ورودی پله واحد	
-	-	۹۵/۵	۳/۷۹	۶۸/۶	۰/۰۹	سیستم اصلی
۰/۰۰۹۳	$۷/۵۳ \times 10^{-۳}$	۹۳/۷	۳/۶۸	۶۵/۳	۰/۰۹۰۷	لاگر- هارمونی
۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۴۴	۹۲	۳/۷۴	۶۱/۵	۰/۰۹۴۶	برش متعادل
۰/۰۶۹۷	۰/۳۹۹۴	۳۸/۲	۲/۸۷	۳۹/۶	۰/۱۳۵	هانکل
۰/۰۰۹۰	۰/۰۰۵۱	۹۳/۶	۳/۸۱	۶۱/۱	۰/۰۹۵۱	پیشنهاد شده توسط اسپانوس

فراجاهش، زمان صعود، زمان نشست، مقدار حالت ماندگار، شاخص انتگرال مربع خطا و نرم H_{∞} خطا بهتری نسبت به روش‌های دیگر است. نتایج به دست آمده بیانگر آن است که روش پیشنهادی دارای دقت بالاتر و توانایی رسیدن به پاسخ دقیقتر با درجه کمتر نسبت به روش‌های کلاسیک است.

منابع:

- [1] Davison, E.J., "A method for simplifying linear dynamic systems", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 11, pp. 93-101, 1966.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، رهیافتی مبتنی بر چند جمله‌ای‌های متعامد لاگر و الگوریتم هارمونی برای کاهش مرتبه سیستم‌ها ارائه شده است که در آن از آرایه روث برای تعیین شرط پایداری استفاده شده است. برای نشان دادن دقت و کارایی روش پیشنهادی سه سیستم بررسی شده است. برای کمی کردن برتری روش پیشنهادی، نتایج این روش با برخی روش‌های کاهش مرتبه موجود در مقالات مقایسه گردیده است. نتایج توانایی الگوریتم پیشنهادی را تایید می‌کند. این نتایج نشان می‌دهد که روش پیشنهادی دارای بیشینه

- generalization and an error bound", Proc. 34th IEEE conf. Decision and Control, New Orleans, LA, Vol. 4, pp. 3576-3581, 1995.
- [18] Kim, S.W., Anderson, B.D.O., Madievski, A.G., "Error bound for transfer function order reduction using frequency weighted balanced truncation", System Control Letters, Vol. 24, No. 3, pp. 183-192, 1995.
- [19] Hwang, C., "Mixed method of Routh and ISE criterion approaches for reduced order modeling of continuous time systems", Trans. ASME, J. Dynamic Systems and Measurement Control, Vol. 106, pp. 353-356, 1984.
- [20] Mukherjee, S., Mishra, R.N., "order reduction of linear systems using an error minimization technique", Journal of Franklin Institute, Vol. 323, No. 1, pp. 23-32, 1987.
- [21] Puri, N.N., Lan, D.P., "Stable model reduction by impulse response error minimization using Mihailov criterion and Pade approximation", Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas Control, Vol. 110, pp. 389-394, 1988.
- [22] Vilbe, P., Calvez, L.C., "On order reduction of linear systems using an error minimization technique", Journal of Franklin Institute, Vol. 327, pp. 513-514, 1990.
- [23] Liu, Y., Anderson, B.D.O., "Singular perturbation approximation of balanced systems", Int. J. Control, Vol. 50, pp. 1379-1405, 1989.
- [24] Feldman, P., Freund, R.W., "Efficient linear circuit analysis by Padé approximation via a Lanczos method", IEEE Trans. Computer-Aided Des. Vol. 14, pp. 639-649, 1995.
- [25] Zadegan, A., Zilouchian, A., "Controller order reduction using frequency domain balanced structure", Proc. World Auto. Congress, Orlando, pp. 163-168, 2002.
- [26] Zadegan, A., Zilouchian, A., "Controller order reduction using the neighborhood of crossover frequency approach" Proc. 17th FL. Conf. Recent Advances Robotics, CDRM, Orlando, 2004.
- [27] Zadegan, A., Zilouchian, A., "Model reduction of large-scale discrete plants with specified frequency-domain balanced structure, J. Dynamic Systems and Measurement Control, Vol. 127, No. 3, pp. 486-498, 2005.
- [28] Cheng, S.L., Hwang, C., "Optimal approximation of linear systems by a differential evolution algorithm", IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, Vol. 31, No. 6, pp. 698-707, 2001.
- [29] Satakhshi, S., Mukherjee, S., Mittal, R.C., "Order reduction of linear discrete systems
- [2] Chidambara, M.R., "Further comments by M.R. Chidambara", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 1, pp. 799-800, 1967.
- [3] Chidambara, M.R., "Two simple techniques for the simplification of large dynamic systems", Proc. JACC, pp. 669-674, 1969.
- [4] Chen, C.F., Shieh, L.S., "A novel approach to linear model simplification", Int. J. Control, Vol. 8, pp. 561-570, 1968.
- [5] Wilson, D.A., "Optimal solution of model reduction problem", Proc. IEE, Vol. 117, 1970.
- [6] Wilson, D.A., "Model reduction for multivariable systems", Int. J. Control, Vol. 20, pp. 57-64, 1974.
- [7] Hutton, M., Friedland, B., "Routh approximations for reducing order of linear, time-invariant systems", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 20, No. 3, pp. 329-337, 1975.
- [8] Langholz, G., Feinmesser, D., "Model reduction by routh approximations", Int. J. Systems and Science, Vol. 9, No. 5, pp. 493-496, 1978.
- [9] Shamash, Y., "Model reduction using the Routh stability criterion and Pade approximation technique", Int. J. Control, Vol. 21, No. 3, pp. 475-484, 1975.
- [10] El-Attar, R.A., Vidyasagar, M., "Order reduction by L_1 and L_∞ norm minimization", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 23, No. 4, pp. 731-734, 1978.
- [11] Eitelberg, E., "Model reduction by minimizing the weighted equation error", Int. J. Control, Vol. 34, No. 6, pp. 1113-1123, 1981.
- [12] Obinata, G., Inooka, H., "Authors reply to comments on model reduction by minimizing the error", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 28, pp. 124-125, 1984.
- [13] Wan, B.W., "Linear model reduction using Mihailov criterion and Pade approximation technique", Int. J. Control, Vol. 33, pp. 1073-1089, 1981.
- [14] Moore, B.C., "Principal component analysis in linear systems: controllability, observability and model reduction", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 26, pp. 17-32, 1981
- [15] Glover, K., "All optimal hankel norm approximation of linear multivariable systems and their L_∞ error bounds", Int. J. Control, Vol. 39, pp. 1115-1193, 1984.
- [16] Ennes, D., "Model reduction with realizations: an error bound and a frequency weighted generalization" Proc. Of the 23 rd IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, pp. 127-132, 1984.
- [17] Sreeram, V., Anderson, B.D.O., "Frequency weighted balanced reduction technique: A

- Wiley, 1996.
- [41] Spanos, J.T., Hilman, M.H., Mingori, D.L., "A new algorithm for L_2 optimal model reduction", *Automatica*, Vol. 28, No. 5, pp. 897-909, 1992.
-
- ¹ - Harmony Search (HS)
² - memory consideration
³ - pitch adjustment
⁴ - randomization
⁵ - Harmony Memory Size
⁶ - Harmony Memory Consideration Rate
⁷ - Pitch Adjustment Rate
⁸ - BandWith
⁹ - with probability
- using a genetic algorithm" *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 29, 565-578, 2005.
- [30] Kumar. D., Prasad, R., "Mixed evolutionary techniques to reduce order of linear interval systems using generalized routh array", *Int. J. Engineering Science and Technology*, Vol. 2, No. 10, pp. 5197-5205, 2010.
- [31] Chen, Y, Balakrishnan. V, Koh. C-K, Roy. K, "Model Reduction in the Time-Domain using Laguerre Polynomials and Krylov Methods", *Proc. of Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition, Paris*, pp. 931-935, 2002.
- [32] Wang, X-L., Jiang, Y-L., "Model order reduction methods for coupled systems in the time domain using Laguerre polynomials", *Journal of Computers & Mathematics with Applications*, V. 62 No. 8, pp. 3241-3250, 2011.
- [33] Nasiri Soloklo, N., Maghfoori Farsangi, M., "Multi-Objective Weighted Sum Approach Model Reduction by Routh-Pade Approximation Using Harmony Search", *Turkish journal of Electrical Engineering and Computer Science*, Vol. 21, pp. 2283-2293, 2013.
- [34] Nasiri Soloklo, H., Maghfoori Farsangi, M., "Chebyshev Rational Functions Approximation for Model Order Reduction Using Harmony Search", *Scientia Iranica*, Vol. 30, No. 3, pp. 771-777, 2013.
- [35] Hwang, C., Shin, Y.P., "Laguerre series direct method for variational problems" *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 39, No. 1, pp. 143-149, 1983.
- [36] Geem, Z.W., Kim, J.H., Loganathan, G.V., "A new heuristic optimization algorithm: harmony search", *Simulation*, vol. 76, no. 2, pp. 60-68, 2001.
- [37] Geem, Z.W., "Music-inspired harmony search algorithm: theory and applications, *Studies in Computational Intelligence*, Springer, 2009.
- [38] Singh, V., "Obtaining Routh-Pade approximants using the Luus-Jaakola algorithm", *IEE Proc .Control Theory and Application*, Vol. 152, No. 2, pp. 129-132, 2005.
- [39] Parmar, G., Mukherjee, S., Prasad, R., "Reduced Order Modeling of Linear Dynamic Systems using Particle Swarm Optimized Eigen Spectrum Analysis", *International Journal of Computer and Mathematic Science*, Vol. 1, No. 1, pp. 45-52, 2007.
- [40] Skogestad, S., Postethwaite, I., "Multivariable feedback control, analysis and design", John